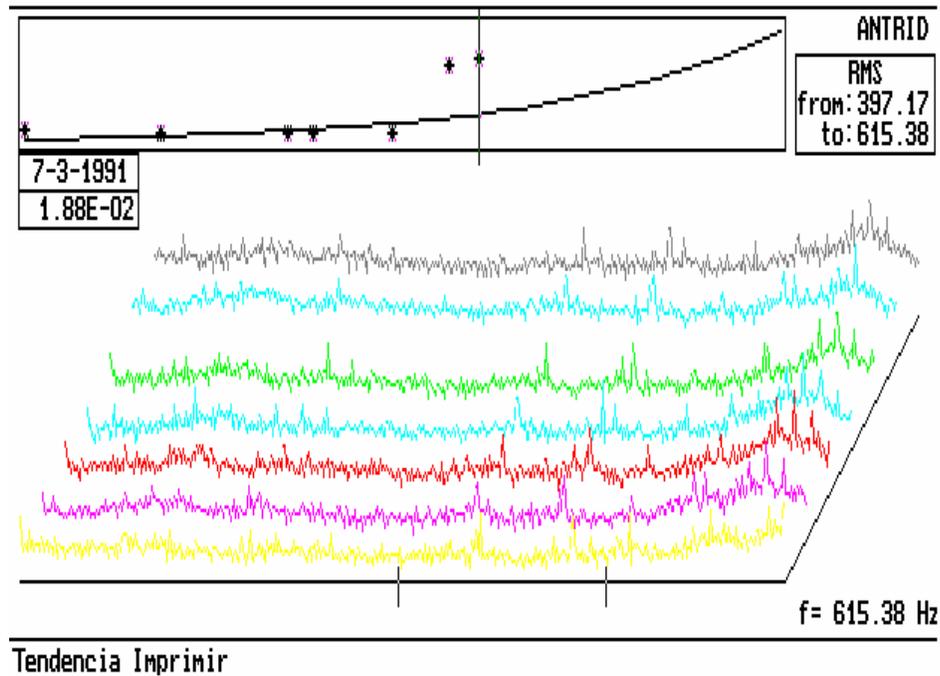


# LAS VIBRACIONES MECANICAS Y SU APLICACION AL MANTENIMIENTO PREDICTIVO



**GENARO MOSQUERA (COORDINADOR)**  
**MARGARITA DE LA VICTORIA PIEDRA DIAZ**  
**RAUL ANTONIO ARMAS CARDONA**

**CENTRO DE ALTOS ESTUDIOS GERENCIALES ISID**  
**Caracas, Venezuela, 2001.-**





# **LAS VIBRACIONES MECANICAS Y SU APLICACION AL MANTENIMIENTO PREDICTIVO**



**Centro de Altos Estudios Gerenciales  
Instituto Superior de Investigación y Desarrollo  
Caracas, 2001.**

**Copyright, 2001.**

**ISBN 980 00-1490-X 980 07 5678-7**

**2ª. Edición Adaptada como  
herramienta computacional.**

**Centro de Altos Estudios Gerenciales ISID**

**Empresa de la Fundación Educativa “María Castellanos”**

**Femaca e-mail: [femaca@telcel.net.ve](mailto:femaca@telcel.net.ve)**

**En convenio con Cybercentrum Las Mercedes C.A.  
y Edukami U.S.A.**

## **AGRADECIMIENTO**

**A la Universidad Central de Venezuela, Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico quien en convenio con el Instituto Superior de Ciencias y Tecnologías Nucleares publicaron la primera edición de este texto como resultado de un proyecto de Investigación sobre Gerencia Técnica. Así mismo, al Ing. Luis A. Martínez quien digitalizó y reviso el contenido de esta obra.-**



# INDICE GENERAL

## PROLOGO

I. EL MANTENIMIENTO PREDICTIVO POR VIBRACIONES MECANICAS .....	1
1.1 Introducción .....	1
1.2 El Mantenimiento predictivo frente a otros tipos de mantenimiento .....	1
1.2.1 El mantenimiento preventivo planificado. Desmontajes periódicos e inspecciones .....	2
1.2.2 El mantenimiento predictivo .....	4
1.3 Aspectos básicos del mantenimiento predictivo .....	5
1.4 Ventajas y desventajas del análisis por vibraciones aplicado al mantenimiento de las máquinas .....	7
1.5 Justificación económica del mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas .....	9
1.6 Instrucción del personal y condiciones de la eficacia en la ejecución del mantenimiento predictivo .....	10
1.7 Pasos para la aplicación del mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas .....	12
1.8 Determinación de los niveles de vibración .....	15
II. ANALISIS DE SEÑALES .....	23
2.1 Introducción .....	24
2.2 Señales periódicas .....	28
2.2.1 Señales periódicas complejas .....	33
2.2.2 Combinación de oscilaciones de igual frecuencia .....	35
2.2.3 Combinación de movimientos oscilatorios de frecuencias diferentes .....	36
2.2.4 Combinación de oscilaciones perpendiculares entre sí de iguales frecuencias .....	39
2.2.5 Combinación de oscilaciones perpendiculares entre sí de frecuencias diferentes .....	43
2.3 Señales determinísticas no periódicas .....	43
2.3.1 Vibraciones cuasiperiódicas .....	44
2.3.2 Señales Transitorias .....	44
2.3.2.1 Vibración libre amortiguada .....	45
2.3.2.2 Fuerzas impulsivas .....	54
2.4 Vibraciones forzadas .....	62
2.4.1 Vibraciones forzadas no amortiguadas .....	63
2.4.2 Vibraciones forzadas amortiguadas .....	67
2.5 Señales aleatorias .....	74
2.5.1 Valor medio cuadrático .....	78
2.5.2 Función de densidad de probabilidad .....	78
2.5.3 Función de autocorrelación .....	83
2.5.4 Función de densidad de potencia espectral .....	88

III. SISTEMAS DE ADQUISICION DE LA INFORMACION .....	93
3.1 Introducción .....	94
3.1.1 El acelerómetro piezoeléctrico .....	96
3.1.1.1 Principio de operación .....	96
3.1.1.2 Ecuaciones básicas de operación .....	98
3.1.1.3 Distorsiones de señales .....	106
3.1.1.4 Materiales y efectos piezoeléctricos .....	111
3.1.1.5 Obtención del material piezoeléctrico artificial.....	114
3.1.1.6 La curva de respuesta de frecuencia del acelerómetro .....	117
3.1.1.7 Nociones sobre la selección de acelerómetros.....	121
3.1.2 Otros instrumentos de medición.....	126
3.1.2.1 Instrumentos para medir la velocidad de la vibración .....	127
3.1.2.2 Instrumentos para medir el desplazamiento de la vibración.....	130
3.2 Instrumentación secundaria .....	133
3.2.1 Amplificadores de carga.....	134
3.2.2 Uso del osciloscopio catódico y el registro en banda magnética .....	143
3.2.3 El conversor análogo-digital .....	149
3.3 Sistemas primarios de adquisición de la información .....	153
3.3.1 El sensor y el vibrómetro .....	153
3.3.2 Sensor, analizador de frecuencias y graficador.....	155
3.3.3 El captador digital de información y la MCD.....	158
3.4 Sistemas avanzados de adquisición de la información.....	161
IV. APLICACIONES .....	165
4.1 Sistemas de Unidades .....	166
Ejemplo 4.1 .....	170
Ejemplo 4.2 .....	176
Ejemplo 4.3 .....	179
Ejemplo 4.4 .....	181
4.2 Defectos más comunes en máquinas .....	184
4.3 Algunas máquinas y sus defectos más comunes.....	186
4.4 Análisis de fase.....	191
4.5 A manera de conclusión.....	192
BIBLIOGRAFIA .....	195

## PROLOGO

La eficacia técnica y económica en la administración del mantenimiento de una organización industrial depende en gran parte de los métodos y herramientas de soporte disponibles, así como del nivel de capacitación del personal para su aplicación.

En la misma medida que la tecnología produce instrumentos de apoyo a la labor gerencial cada vez más sofisticados, se requiere mayor perfeccionamiento de los administradores y del personal técnico involucrado en las operaciones de mantenimiento.

La búsqueda de nuevos conceptos, métodos y técnicas aplicables al mantenimiento industrial y la elaboración de material para entrenamiento de técnicos y profesionales del área, motivó, a partir de 1982, la realización de varios estudios auspiciados por la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la U.C.V., para el programa de Maestría en Ciencias Administrativas. Dichos estudios, dirigidos por el Dr. Genaro Mosquera C., profesor titular de la Universidad Central de Venezuela, pusieron de manifiesto la situación del mantenimiento en Venezuela y fueron posteriormente ampliados por un grupo constituido por especialistas venezolanos y del Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares, para cubrir, entre otros, algunos aspectos fundamentalmente técnicos de la planificación del mantenimiento y de la prevención de fallas de equipos e instalaciones, como lo constituye el Mantenimiento Preventivo por Vibraciones Mecánicas, conocido también como Mantenimiento Predictivo, o Monitoreo de la Condición.

Esta publicación incorpora los principios más importantes de la teoría de vibraciones, desarrolla las bases teórico-prácticas del diagnóstico por vibraciones mecánicas, describe los sistemas e instrumentos de más reciente aparición en el mercado, empleados para captar y procesar la información vibroacústica, contiene los conceptos físicos y los modelos matemáticos que constituyen el soporte del software SISDE, creado especialmente por los autores para el estudio del comportamiento de equipos y estructuras sometidos a vibración.

Los análisis vibroacústicos son elementos con alto valor de diagnóstico, especialmente recomendados cuando se trata de monitorear equipos sumamente costosos, sometidos a operación continua, cuya parada o salida de servicio comporta costos de penalización sumamente elevados, y ello justifica que se recurra a las técnicas más sofisticadas para prevenir el riesgo de pérdidas económicas y tecnológicas.

Este libro es el resultado de años de experiencia profesional y docente acumulada por sus autores, y constituye una publicación de carácter único en su género, sea por la profundidad con que se tratan los temas que lo componen, que por lo novedoso de su contenido.

Dr. Genaro Mosquera Castellanos

Coordinador del Proyecto de Investigación sobre Gerencia de Mantenimiento y APS.

**El  
Mantenimiento  
Predictivo por  
Vibraciones  
Mecánicas  
1**

---

## **1.1 Introducción**

El objetivo del mantenimiento es lograr que la maquinaria opere sin problemas, especialmente aquella que es fundamental en el proceso de producción. Es bien conocido que las averías catastróficas e inesperadas dan lugar a elevados costos por: pérdidas en la producción y reparaciones.

El concepto tradicional de mantenimiento, es decir, el mantenimiento preventivo, a pesar de haberse mecanizado, la única estrategia que establece para evitar las averías es realizar:

- desmontajes periódicos para inspección y reparación, si procede y,
- montaje posterior.

Debe señalarse que en ocasiones, el desmontaje periódico trae como consecuencia el cambio de piezas, partes y elementos exigidos por cartas técnicas de mantenimiento y que en realidad pueden estar en buen estado.

Debido al alto costo de esta metodología, solo se aplica a aquellas máquinas que constituyen agregados fundamentales de la empresa industrial. La moderna tecnología proporciona una serie de métodos que permiten una evaluación exterior de las condiciones internas de la maquinaria; sin desmontajes previos y sin afectar su funcionamiento normal. Hoy en día es conocido, y se tiene una amplia experiencia mundial, que el más efectivo de los métodos es el análisis por vibraciones mecánicas. Este análisis de vibraciones, junto con otros parámetros específicos de cada máquina, constituyen la base del moderno mantenimiento predictivo.

## **1.2 El mantenimiento predictivo frente a otros tipos de mantenimiento.**

En todas las instalaciones y plantas industriales donde existe maquinaria de producción con elementos dotados de movimiento rotativo o alternativo, se hace necesario efectuar un mantenimiento de estas máquinas para conservarlas en correcto estado de servicio y garantizar la seguridad y fiabilidad de la planta. Este mantenimiento puede ser más o menos sofisticado,

dependiendo de la naturaleza e importancia de las máquinas que se consideren, agrupadas en varios estados que van desde el más simple, hasta el más complejo. Para formarse un mejor criterio de lo que significa y aporta el mantenimiento predictivo será comparado con su antecesor: el mantenimiento preventivo.

### **1.2.1 Mantenimiento preventivo planificado. Desmontajes periódicos e inspecciones**

En esta metodología, quizás la más extendida actualmente en Latinoamérica, cada máquina principal, después de un determinado período de operación se somete a un desmontaje total o parcial para su inspección y en casos de que existan defectos, proceder a la reparación de los mismos. Aunque el método pueda ser automatizado, presenta los inconvenientes siguientes:

1. El desmontaje periódico, total o parcial, de una máquina con la inevitable interrupción de la producción y reposición de partes y piezas, es excesivamente costoso para la seguridad y fiabilidad de funcionamiento que aportan. No es menos cierto los múltiples casos conocidos, por los ingenieros de plantas, donde averías mayores han tenido lugar de forma súbita e inesperada al transcurrir horas de funcionamiento después de estos chequeos.
2. El intervalo entre inspecciones periódicas, si bien esta basado en la teoría de la fiabilidad y vida media, es difícil de definir. Si no se producen fallos durante este intervalo puede pensarse que el mismo es demasiado corto y por tanto se esté perdiendo dinero. Este planteamiento se ilustra en la Fig. 1.1. En ella se representa el tiempo de trabajo seguro y el tiempo de trabajo hasta la falla de un gran número de máquinas idénticas, que permitió establecer la estadística de fallas que se observa. Si una máquina es sometida a un programa de mantenimiento preventivo planificado dado por el tiempo  $t=t_a$ , para todas las máquinas, cuya estadística de fallas esté por debajo de  $t_a$ , representará un trabajo hasta la rotura. Para el resto, donde sus correspondientes estadísticas de fallas están por encima de  $t_A$  significa dejar de producir estando aún en buenas condiciones técnicas para el trabajo.

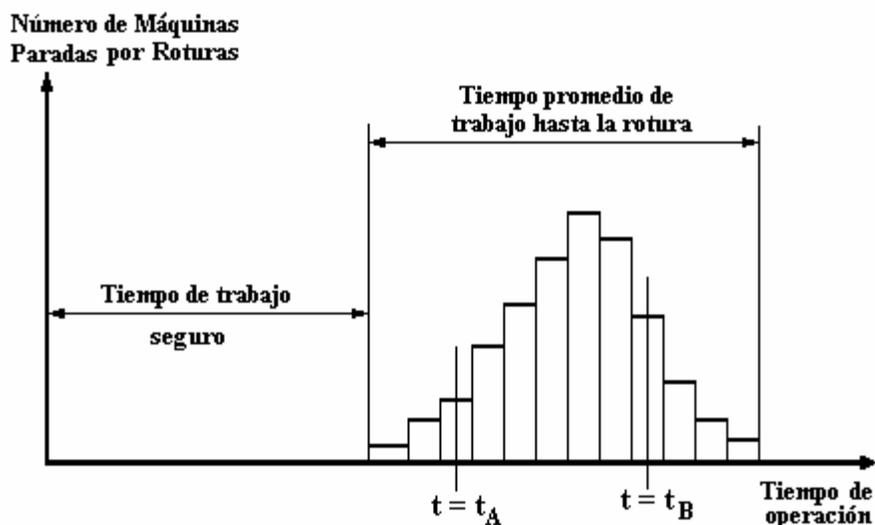


Fig. 1.1 Comportamiento estadístico de máquinas.

Para el caso en que  $t=t_B$  la situación sería catastrófica, ya que la gran mayoría de esas máquinas alcanzarían antes la rotura.

3. A veces una máquina que operaba correctamente al ser sometida a inspección periódica puede quedar, por errores en el montaje, en peores condiciones que las iniciales, siendo así más propensa al fallo, como se muestra en la Fig. 1.2.

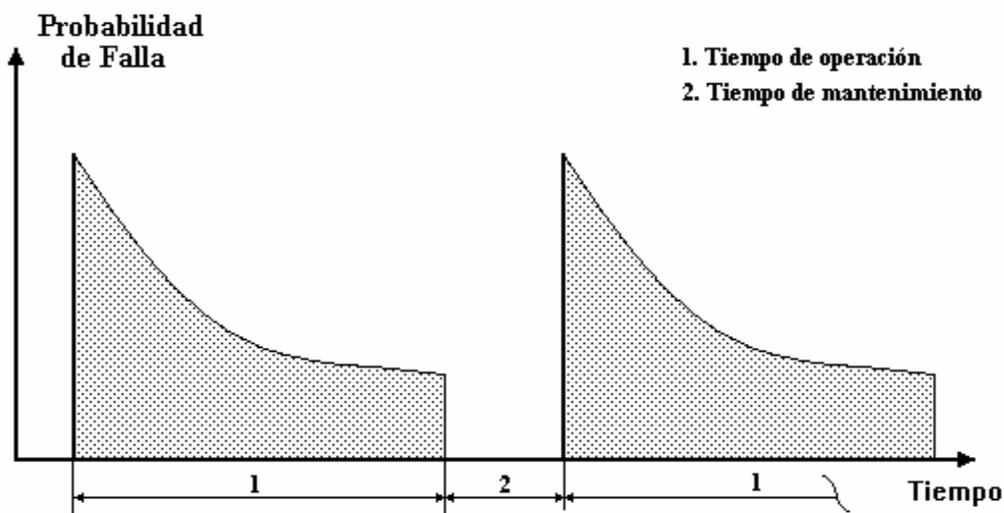


Fig. 1.2 Comportamiento estadístico de fallas en máquinas sometidas a mantenimiento preventivo.

4. Existen defectos en las máquinas que únicamente pueden ser detectados durante el proceso de operación, como: desbalances, resonancias, desalineamientos, etc.

Con relación al mantenimiento de máquinas, tal y como tradicionalmente se entiende y viene aplicándose, puede afirmarse en resumen, que la programación en el tiempo de revisiones y/o reparaciones es INSEGURA e IMPRECISA. Es insegura, porque la necesidad de reparar solo se pone de manifiesto desmontando la máquina y revisando sus elementos; si un defecto grave no se aprecia por inspección el daño será irremediable y la parada inminente en el proceso de producción. Es imprecisa, porque sin medios que permitan determinar el estado técnico o condición de la máquina desde el exterior y sin afectar su normal funcionamiento se desmontarán y revisarán máquinas en perfecto estado y otras con peligro de avería y parada inminente, pueden no ser tenidas en cuenta.

### **1.2.2 Mantenimiento predictivo.**

Dos aspectos principales logra el mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas sobre otros métodos generales de mantenimiento,

- La reducción de costos y,
- El aumento de la seguridad sobre el funcionamiento de los equipos. Esto consiste en la configuración de una metodología que permita la vigilancia continua de las máquinas, especialmente aquellas que son las principales y las de importancia relativa en el proceso productivo de la empresa industrial.

Para que esta nueva metodología, basada en la vigilancia continua, sea eficaz frente a los conceptos tradicionales de mantenimiento, deberá abarcar los objetivos siguientes:

1. No impedir o limitar el funcionamiento de la máquina durante su ejecución;
2. Su costo de implantación debe ser menor que el ocasionado por otro tipo de mantenimiento;

3. Debe permitir la detección de la avería en fase incipiente antes de convertirse en catastrófica, así como la identificación o diagnóstico de la causa que la origina.

Se puede afirmar que el mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas, a través de la medición continua o periódica, el análisis y control de determinados parámetros y la opinión técnica de los operadores de experiencia conforman los indicadores del "estado de salud" o condición de la máquina que cumple con los objetivos anteriores.

Las máquinas ideales no vibran. Toda la energía que intercambia es empleada para efectuar el trabajo para el cual fue diseñada. En la práctica la vibración aparece producto de la transmisión normal de fuerzas cíclicas a través de los mecanismos. Los elementos de la máquina disipan una parte de la energía que se le entregó dando a la estructura una vibración característica.

Una buena concepción de fallas es el nivel de vibración. Son muchos los factores de operación, diseño y montaje que provocan el surgimiento de los diferentes niveles de vibración.

El hecho de que la condición de la máquina esté íntimamente ligada con las vibraciones que ella produce hace que la medición, el análisis de vibraciones, el análisis de señales y el análisis mecánico sean las herramientas básicas del mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas.

### **1.3 Aspectos básicos del mantenimiento predictivo.**

El método general de mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas tiene el objetivo final de asegurar el correcto funcionamiento de las máquinas a través de la vigilancia continua de los niveles de vibración en las mismas, siendo estos últimos, los indicadores de su condición; y se ejecuta sin necesidad de recurrir a desmontajes y revisiones periódicas. Este método considera de antemano que la empresa industrial opera con la suficiente disciplina tecnológica en su maquinaria, esto es: el usuario debe observar las normas de explotación del fabricante. De aquí se desprende la importancia de la conducta de buenas prácticas de operadores y demás personal técnico en la industria.

Esta metodología considera a cada máquina individualmente. Es reemplazada la revisión periódica del mantenimiento preventivo, por la medición regular con la cual se obtiene la evolución total del funcionamiento. Las vibraciones mecánicas son un excelente indicador de estas condiciones, por esta razón el mantenimiento por condición se basa en este parámetro. El axioma del mantenimiento por condición consiste en que las revisiones son efectuadas justamente en el momento en que las mediciones indican que son necesarias. Esta precisamente es la confirmación de la intuición del personal de explotación experimentado, que como resultado de su experiencia piensan, que las máquinas no deben ser tocadas si funcionan bien. Sin embargo, a estos técnicos calificados les era imposible justificar el momento de rotura de la máquina. Las mediciones regulares permiten determinar los niveles inaceptables y definir la correspondiente parada de la máquina.

Como ya se conoce, las vibraciones son normalmente el producto de la transmisión de fuerzas lo que provoca el desgaste y/o deterioro de las máquinas. A través de determinados elementos de las mismas, una fracción de estas fuerzas es disipada hacia el exterior, por ejemplo, mediante los apoyos, uniones, etc. Lo que permite medir la vibración debida a las fuerzas excitadoras. Así, si las fuerzas de excitación se mantienen constantes dentro de ciertos límites, el nivel de vibración medido se mantiene dentro de los mismos límites proporcionalmente. Cuando los defectos comienzan a aparecer, los procesos dinámicos de la máquina son alterados, alterándose las fuerzas que, como resultado, darán una modificación al espectro de vibración. Si se es capaz de transformar el movimiento mecánico, proporcional a las fuerzas actuantes, en señal eléctrica, entonces, la señal de vibración contendrá la información relativa a las condiciones de funcionamiento de la máquina, que de por sí caracteriza el estado técnico de sus partes y componentes, pues cada una tiene la particularidad de vibrar a una frecuencia característica.

La teoría mecánica arriba expuesta conduce a definir que la herramienta básica del presente mantenimiento es, por tanto, el análisis de vibraciones y, los principios en que se basa son los siguientes:

1. Toda máquina en correcto estado de operación tiene un cierto nivel de vibraciones y ruidos, debido a los pequeños defectos de fabricación. Esto puede considerarse como el patrón de referencia, nivel base característico o estado básico de esa máquina en su funcionamiento satisfactorio.
2. Cualquier defecto en una máquina, incluso en fase incipiente, lleva asociado un incremento en el nivel de vibración perfectamente detectable mediante la medición.
3. Cada defecto, aún en fase incipiente, lleva asociado cambios específicos en las vibraciones que produce (espectros), lo cual permite su identificación.

La importancia del método de Análisis por Vibraciones Mecánicas, sustentado en los avances de la moderna tecnología de medición y en el análisis dinámico temporal y frecuencial de señales, y utilizado como herramienta del mantenimiento predictivo, permite hoy en día, detectar con gran precisión desde desgastes de cojinetes antifricción, hasta qué diente de un reductor de engranajes está dañado.

El alcance atribuido al mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas está supeditado a la mayor rentabilidad, seguridad y precisión en el diagnóstico.

#### **1.4 Ventajas y desventajas del Análisis por Vibraciones aplicado al mantenimiento de las máquinas.**

Ya se conoce que con los métodos de mantenimiento anteriores se garantiza el proceso productivo, pero el costo de los mismos es mayor debido a los elementos que a continuación se resumen:

- ◆ sustitución completa de máquinas y elementos de máquinas;
- ◆ largos períodos de mantenimiento;
- ◆ elevado número de personal de mantenimiento;
- ◆ elevado número de máquinas de recambio y piezas de repuesto en almacenes;
- ◆ grandes daños en la producción en casos de fallas o averías inesperadas.

Veamos, entonces, las ventajas que reporta el análisis por vibraciones aplicado al mantenimiento de las máquinas:

- a. detección precoz e identificación de defectos sin necesidad de parar ni desmontar la máquina;
- b. seguir la evolución del defecto en el transcurso del tiempo hasta que este se convierta en un peligro;
- c. programación, con suficiente tiempo, del suministro del repuesto y la mano de obra para acometer la reparación particular;
- d. programación de la parada para corrección dentro de un tiempo muerto o parada rutinaria del proceso productivo;
- e. reducción del tiempo de reparación, ya que se tienen perfectamente identificados los elementos desgastados, averiados o, en general, posibles a fallar;
- f. reducción de costos e incremento de la producción por disminución del número de paradas y tiempos muertos;
- g. permite una selección satisfactoria de las condiciones de operación de la máquina;
- h. funcionamiento más seguro de la planta y toma de decisiones más precisas de los ejecutivos de la empresa industrial.

Resulta conveniente mencionar, que en los países desarrollados es exigido ya, por ley, que el funcionamiento de la maquinaria ha de estar en correctas condiciones de operación, con bajos niveles de vibración y ruidos, como ventajas ambientales para el personal de operación.

Sobre las desventajas que obviamente enfrentará la empresa que decida aplicar este método de trabajo se puede plantear lo siguiente. El empleo de esta técnica requiere de un mínimo personal calificado, seleccionado entre los mismos trabajadores de la empresa, así como del empleo de equipamiento de alta tecnología; por lo que su utilización se ve limitada aparentemente, en algunos casos, por la inversión inicial. Sin embargo, al comparar los resultados que se pueden alcanzar, inclusive a corto plazo, éstos superan satisfactoriamente la inversión en estas técnicas.

De esta manera, a continuación se relacionan las actividades que requieren inversiones iniciales:

- investigación del equipamiento a monitorear (límites de vibración, determinación de espectros patrones, selección de puntos de medición, etc.);
- selección y adquisición de la instrumentación;
- formación del personal encargado de las mediciones de rutina (seleccionado de la misma planta);
- especialización del personal ejecutivo y de ingeniería encargado de procesar las mediciones y de la toma de decisiones.

### **1.5 Justificación económica del mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas.**

Es evidente que el criterio “ahorro” será el que mueva o decida a los ejecutivos de empresas a la realización de la inversión que supone la implantación de este método de mantenimiento. Esto es, es necesario realizar una evaluación de la rentabilidad de esta inversión.

El problema que se enfrenta para realizar esta tarea, es que para evaluar la factibilidad del nuevo método de mantenimiento es imprescindible partir de su ejecución o implantación. Una vez efectuado el cómputo en términos de costos por paradas imprevistas y costos por averías (en el procedimiento convencional de mantenimiento), se procede a la implantación del mantenimiento predictivo. La suma de costos a posteriori, correspondiente, será la mejor evaluación que se pueda realizar de la inversión. Por consiguiente, en una primera etapa es fundamental apelar a la credibilidad técnica por parte de los futuros usuarios y a la comparación o ilustración de experiencias acontecidas en otras empresas industriales del mismo país u otros países. En los países desarrollados el método de mantenimiento por vibraciones mecánicas constituye una técnica tan extendida en la industria, que actualmente no requiere de muy amplia fundamentación económica.

Los beneficios económicos que se han logrado en la práctica internacional, aunque han sido de una forma u otra, mencionados anteriormente, serán expuestos de forma resumida a continuación:

1. reducción de las máquinas de reserva;
2. reducción notable del período de mantenimiento;
3. reducción del personal de mantenimiento propio y el contratado;
4. reducción de los gastos (capital inmovilizado) por equipos, máquinas menores, elementos de máquinas y piezas de repuesto en almacenes;
5. eliminación de las averías por roturas inesperadas, esto es, fiabilidad y productividad superiores;
6. eliminación de los daños en la producción final de alto costo debido a fallas de elementos de poco valor.

### **1.6 Instrucción del personal y condiciones de la eficacia en la ejecución del mantenimiento predictivo.**

Son precisamente las condiciones humanas y materiales las que determinan el nivel de aplicación del mantenimiento predictivo.

Frecuentemente ocurre que al personal del departamento de mantenimiento, especializado y dedicado completamente a las intervenciones tradicionales, se le asigna una tarea adicional: la medida de las vibraciones, de la que en la mayoría de los casos desconoce sus fundamentos y utilidad práctica final. Esto provoca que el mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas, quede reducido a una inspección rutinaria más y, a que su eficacia no pueda ser evaluada.

Por otro lado, se tienen los casos de empresas donde se dispone de instrumentación suficiente para realizar estas tareas, e incluso máquinas monitoreadas ininterrumpidamente para las que la operatividad del método es nula. Esto es, se hacen inversiones que están totalmente subutilizadas.

Las situaciones menos frecuentes son aquellas empresas que con el equipamiento mínimo logran los mayores beneficios económicos (ejemplos: CTE de Mariel, La Habana; Planta Industrial de Fertilizantes, Cienfuegos; etc.).

La línea más conveniente para salvar las situaciones negativas arriba descritas y poder situar al departamento técnico o de mantenimiento, según el caso, a la altura de las nuevas tecnologías en cuanto a su asimilación correcta y eficiente, consiste en los pasos de instrucción siguientes:

- calificación del personal directivo y ejecutivo, fundamentalmente;
- formación adecuada del personal técnico especializado, que se le va a asignar esta tarea.

En lo que se refiere al primer proceso instructivo, el grado de sensibilización cada vez es mayor. En cuanto al segundo, no es menos cierto que las ventajas económicas y de seguridad que aporta el plan de mantenimiento predictivo correctamente introducido en una empresa industrial son tan grandes que justifican la presencia de, por lo menos, una o dos personas especializadas (según la escala de la empresa) en la medida y análisis de vibraciones: el analista de vibraciones.

En este sentido, son de destacar las iniciativas adoptadas en muchos países y regiones industriales con vistas a desarrollar programas de formación y cursos adaptados a sus máquinas para lograr un entrenamiento acelerado de su personal de mantenimiento, así como la reestructuración y modernización de las direcciones o secciones de mantenimiento.

Los aspectos básicos que condicionan la eficacia de un plan de mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas son:

- el volumen de información obtenido;
- su procesamiento y tratamiento;
- la rápida disponibilidad de resultados para la toma de decisiones.

Estos acondicionamientos y la limitación derivada de una incompleta calificación del personal, quedan subsanados con la incorporación de los ordenadores a la ejecución de las tareas del mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas. Las capacidades reales de los softwares analizadores de señales hacen que el plan de mantenimiento predictivo quede reducido simplemente a la obtención de datos.

### **1.7 Pasos para la aplicación del mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas.**

El programa de mantenimiento predictivo comienza con la relación de aquellas máquinas que deberán ser incluidas. La decisión de la inclusión de la máquina se fundamenta en: el grado de incidencia económico que esta tiene en el proceso de producción como consecuencia de los costos por parada o interrupción, así como por reparación.

Estos son los factores que establecen el volumen de ejecución e instrumentación técnica del programa.

Sobre la base del anterior criterio se definen las necesidades: humanas y materiales, para cubrir los objetivos.

Seleccionadas las máquinas se procede a obtener, si es posible, la siguiente información:

1. Espectros de referencia; característicos de la máquina en diferentes puntos cuando esta opera correctamente.
2. Historial de mantenimiento; datos del fabricante sobre causas de averías, vibraciones características; datos del explotador en estos mismos tópicos (reforzando el conocimiento en tipos de averías más frecuentes).
3. Datos técnicos específicos: r.p.m., potencia, número de álabes, cojinetes (datos geométricos característicos), reductor (número de dientes, relaciones de transmisión), etc.
4. Conocimiento de la máquina: condiciones de operación, función de la máquina en el proceso, alteración de los niveles de vibración con los cambios en las condiciones de operación (temperatura, carga, velocidad y otros), etc.
5. Codificación e identificación de las máquinas seleccionadas: la codificación deberá indicar lugar, posición, tipo de máquina, número de ellas, etc.

A continuación, para cada máquina seleccionada se le definen los aspectos siguientes:

- puntos y direcciones de medición (axiales, radiales);
- magnitud a medir (desplazamiento, velocidad, aceleración);
- tipo de sensor adecuado;

- definición del intervalo de frecuencia a medir.

Una vez cumplimentados los pasos anteriores, es conveniente que se ejecuten varias mediciones de pruebas que permitan:

- I. la familiarización con los espectros característicos de cada máquina;
- II. la optimización de puntos de medición y direcciones;
- III. en caso que no se hayan podido conseguir los espectros de referencia, previamente del fabricante, se procederán a obtener con la ayuda de los operadores más experimentados;
- IV. ídem, para el caso de los niveles de amplitud de vibración total;
- V. en la medida de las posibilidades se obtendrán los cambios de espectros y amplitudes ante variaciones o desviaciones de las condiciones de operación;
- VI. estudio de la conveniencia en el tratamiento de la información manual o computarizada, de lo que se desprende la existencia del:  
protocolo de mediciones, fichero o cuaderno de máquinas; donde se irán clasificando y ordenando de forma cronológica los datos relativos a cada máquina junto con sus características y espectro de referencia. En el caso de que esta información sea tratada en microcomputadora se dispondrá de un disquete con el código de identificación asignado a la máquina.

La preparación del protocolo de mediciones o el fichero o cuaderno de máquina destinado a cada una adscrita al plan de mantenimiento predictivo, es indispensable para alcanzar la mejor organización y resultado del método en cuestión. Dicho protocolo, fichero o cuaderno deberá contener como datos principales, los siguientes:

- a. código de identificación de la máquina;
- b. puntos y direcciones de medición (esquema de la máquina);
- c. condiciones de operación relativas al proceso como: velocidad en el momento de la medición, temperatura del cojinete, temperatura de gases de escape, presión del fluido, etc.

- d. espectros de referencia;
- e. espectros obtenidos durante la aplicación del programa, es decir, espectros de frecuencia de la vibración característica de la máquina para cada punto de medición en sus correspondientes direcciones;
- f. amplitud de la vibración total para cada punto de medición en sus correspondientes direcciones;
- g. fecha y hora de ejecución de las mediciones;
- h. criterios de severidad o normas iniciales aplicadas;
- i. curvas de tendencia para las frecuencias típicas, armónicos y la amplitud de la vibración total;
- j. intervalo de frecuencia a medir;
- k. frecuencia de muestreo o intervalo de las mediciones.

Para cada máquina es preciso establecer los criterios de severidad, considerados, por ejemplo, de la siguiente manera:

ALARMA - nivel de vibración severo

PARADA - nivel de vibración no aceptable

En caso de no disponer de criterios del suministrador se acudirá, como primera referencia de partida, a las normas existentes. El conocimiento de la máquina y su correspondiente historial, serán la base más segura para la redefinición de los niveles óptimos de la máquina en uso.

No existe ninguna regla que establezca cuál debe ser el intervalo entre dos mediciones consecutivas en cada máquina. Esta frecuencia de muestro está sujeta a factores tales como:

- importancia de la máquina en el proceso de producción;
- características específicas de la propia máquina;
- estabilidad de las gráficas de tendencia;
- historial de averías, etc.

En definitiva, esta frecuencia se establece primeramente de acuerdo a estos criterios y será el proceso dinámico de optimización del programa quien defina el intervalo más adecuado para cada máquina.

Sobre la base de la información que se obtenga y como síntesis para la toma de decisiones, se elaborarán los resúmenes siguientes:

- curva de análisis de tendencia que representa la variación de la amplitud de la vibración total en el tiempo;
- curvas de análisis de tendencia de frecuencias típicas y armónicos más significativos del espectro;
- mapas espectrales en función de las condiciones de operación.

El orden de los pasos para la aplicación del método de mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas arriba esbozado, no constituye una indicación metodológica rígida, ni mucho menos una norma invariable a seguir. Las condiciones objetivas de la empresa industrial establecerá, en la práctica, proceder en el orden consecutivo más conveniente.

### **1.8 Determinación de los niveles de vibración.**

La determinación de los niveles normales de vibración es uno de los aspectos más importantes dentro de las tareas de organización para la implementación del diagnóstico predictivo por vibraciones mecánicas en una industria. Una incorrecta determinación de este parámetro puede conducir a consecuencias fatales para la máquina y la industria en general.

En la determinación del nivel normal de vibración para una máquina dada, los elementos que decidirán cuál debe ser el valor que se tomará como referencia están relacionados con la experiencia del operador en el trabajo con ellas, las características vibratorias de la misma y la rapidez con que evolucionan sus parámetros vibratorias. Como referencia deben conocerse los valores, que para estas máquinas tienen otras de su tipo, o cuáles son los valores recomendados por las **Normas Internacionales sobre vibraciones mecánicas**.

Un método muy empleado para la determinación de los niveles normales de vibración es el análisis de tendencia. Este es un método muy simple el cual se basa en la graficación de los parámetros vibratoriales de la máquina durante la explotación. El mismo puede implementarse de forma automática o manual.

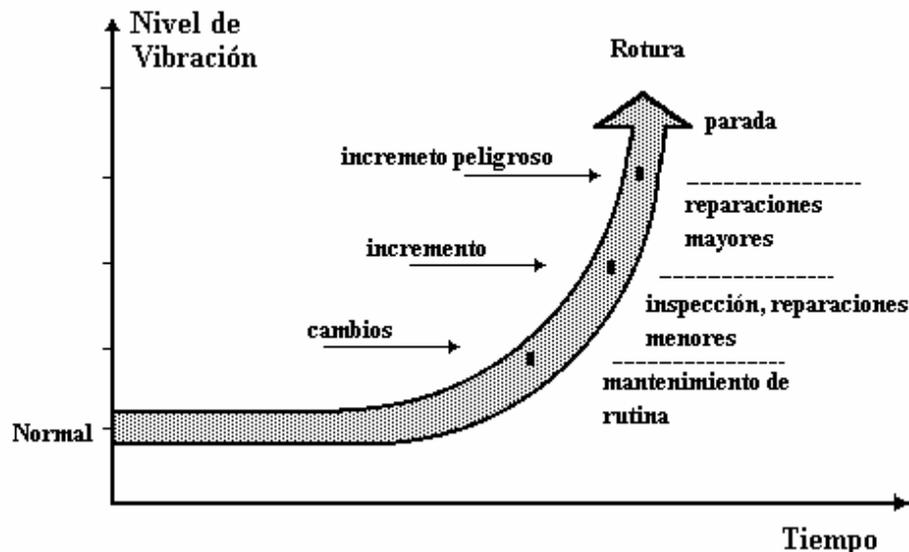
Si el estado técnico es bueno, los niveles de vibración mantienen sus valores constantes. Si aparece alguna falla, entonces estos valores comienzan a crecer en la medida que ésta se desarrolla.

Las máquinas poseen características propias dadas las condiciones en que fueron construidas y montadas (su acabado superficial, rigidez, ajustes, etc. ). Estas condiciones determinan un nivel vibracional característico en la misma. Si una de estas características varía, inmediatamente se reflejará en el nivel vibracional, lo que indicará que ha ocurrido una alteración en las condiciones originales de la misma.

La alteración del nivel vibracional no significa que necesariamente ocurrirá una avería inmediata, por ejemplo, las Normas de Severidad ISO 2372 establecen que el nivel de vibración de 0,71 mm/s es satisfactorio para máquinas rotatorias con potencia menor de 75 Kw. Sin embargo, una máquina puede encontrarse en buen estado técnico y tener un nivel de vibración por encima de este valor. Este hecho significa que el valor del nivel normal de vibración no es absoluto, sino que depende de muchos factores, por lo que para su determinación debe establecerse un compromiso entre ellos.

Como elemento auxiliar en el logro de este objetivo, el análisis de tendencia tiene una gran aplicación. Es por ello, que en el estudio preliminar de la máquina, se establece como regla la realización de mediciones periódicas para obtener la tendencia de los valores vibratoriales de la misma. Con el análisis de tendencia se puede, además, determinar el momento de posible rotura tomando como referencia el valor máximo permisible del nivel vibración.

El análisis de tendencia exige que las mediciones se efectúen sobre los mismos puntos de medición, los que deben ser seleccionados de acuerdo a la estrategia establecida para el estudio de la máquina, manteniéndose siempre, las mismas condiciones del muestreo. El análisis puede realizarse tanto sobre los valores globales de la vibración, como sobre los espectros vibratoriales.



**FIG. 1.3 Gráfica de tendencia de una máquina rotatoria.**

En la Fig. 1.3 se muestra el gráfico de tendencia de una máquina rotatoria de baja potencia. En la gráfica se ofrece una orientación sobre los criterios de severidad y donde los cambios se reportan como etapas en la evolución del nivel vibracional. El primer incremento de nivel, que representa aproximadamente dos veces el normal, se registra como inicio de cambios. En ella comienza a desarrollarse la falla, la cual debe ser liquidada, con pequeños ajustes o mantenimiento de rutina. La segunda etapa exige una mayor investigación de las causas que han originado el aumento del nivel de vibración y la tercera, donde los niveles de vibración han alcanzado valores de hasta ocho veces el valor de nivel normal, exige una acción inmediata.

Los cuadernos de máquinas o cartas de control son elementos auxiliares de mucha ayuda, como expediente de los valores globales de los niveles de vibración en la máquina. En ellos pueden ser registrados periódicamente los valores medidos en los puntos seleccionados y todas las incidencias ocurridas durante las mediciones. Un ejemplo se muestra en la Fig. 1.4

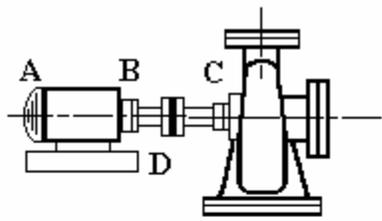
Carta de Control GDVM / ISCTN							
Tipo de máquina: Bomba Centrífuga							
Area de sistemas auxiliares							
RPM nominal.- 2750							
Hoja No 1 $v(\text{mm}\cdot\text{s}^{-1})$							
dirección	fecha	realizado	A	B	C	D	Observaciones
axial							
vertical							
horizon							
axial							
vertical							
horizon							
axial							
vertical							
horizon							

Fig. 1.4 Ejemplo de cuaderno de máquina o carta de control.

Otro método que puede ser empleado para la determinación de los niveles normales de vibración, es el análisis estadístico. Este método es muy utilizado para el control de la calidad en la fabricación de máquinas rotatorias. En los casos en que el fabricante no aporte los niveles de vibración característicos de una máquina es posible realizar un trabajo de pruebas estadísticas, cuando el número de máquinas idénticas (relativamente grande) trabajan bajo las mismas o parecidas condiciones de explotación. Así, mediante la medición periódica de las máquinas y sus restantes parámetros de trabajo, es posible establecer los correspondientes niveles normales y anormales de vibración de las máquinas en cuestión.

En las máquinas rotatorias pueden ocurrir fallas que son muy comunes durante la operación. Este comportamiento se refleja en el nivel normal de vibración que ellas presentan durante el trabajo. Sin embargo, el valor que este nivel puede tomar dependerá de la clasificación a la que pertenezca la

máquina, dentro de los tipos establecidos por recomendaciones de algunas normas (ver Tabla 1.1). Realmente, es muy difícil establecer a priori cuál es el valor máximo de vibración después del cual habrá una rotura inminente.

**TABLA 1.1 Recomendaciones para la clasificación de las máquinas**

<b>Clase I</b>	Máquina con potencia < 15 Kw	<b>Clase III</b>	Máquinas grandes en rotación con fundamentos rígidos
<b>Clase II</b>	Máquinas con potencia entre 75 Kw	<b>Clase IV</b>	Máquinas grandes en rotación con fundamentos flexible

Las máquinas se diferencian por su tamaño, por su rigidez, así como por su amortiguamiento, lo que incide en que los valores de los niveles de vibración no sean iguales, inclusive, entre máquinas idénticas operando bajo las mismas condiciones. Actualmente se toman como guía numerosas cartas de severidad que son el resultado de muchos años de experiencia en la implementación de las técnicas de diagnóstico por vibraciones mecánicas en la industria. Estas recomendaciones unidas al control del comportamiento de la máquina durante un período prolongado de operación, permiten determinar con mayor certeza, el valor que se debe tomar como referencia.

En la figura 1.5 se muestra un ejemplo de carta de severidad para la selección del nivel máximo permisible de vibración de acuerdo a la clasificación de las máquinas dada por la Tabla 1.1, y en donde los valores de amplitud de la vibración se expresan en mm/s.

Para llevar a buen término un programa de verificación del estado técnico de las máquinas basado en el nivel máximo permisible de la vibración, se deben tomar reglas generales que hagan reales los pronósticos. Por ejemplo, con qué velocidad aumentó la amplitud de la vibración, en cuántas veces aumentó, entre otros aspectos.

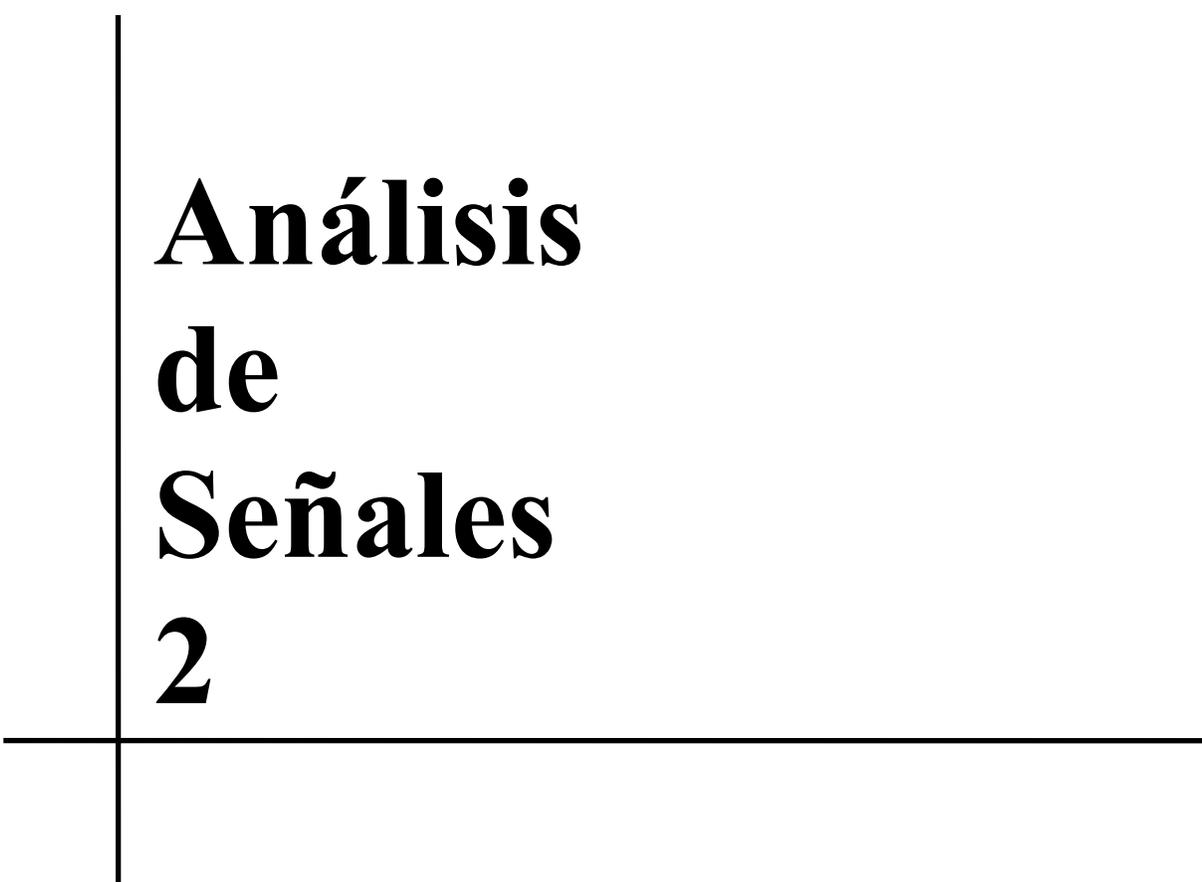
Si la máquina mantiene invariable su nivel de vibración por un período de tiempo que puede extenderse hasta un año, es innegable que estos valores representan su nivel normal de vibración. Si por el contrario, este nivel se incrementa en más de dos veces respecto a su valor inicial, no hay dudas que se ha originado una falla y se hace necesario su corrección.

**Fig. 1.5 Carta de severidad, según Norma ISO 2372**

Intervalos de severidad de la vibración RMS de la velocidad en mm/s	Ajustes de calidad para diferentes Clases de máquinas			
	Clase I	Clase II	Clase III	Clase IV
0.28	A	A	A	A
0.45				
0.71				
1.12	B	B	B	B
1.8				
2.8	C	C	C	C
4.5				
7.1	D	D	D	D
11.2				
18				
28				
45				
71				

- A** Equipo bien balanceado y alineado  
**B** Pequeñas fallas  
**C** Estado peligroso  
**D** Inaceptable, rotura inminente
- Clase I** Máquinas con potencia menor a 15 Kw  
**Clase II** Máquinas con potencia entre 15-75 Kw rigidamente montadas  
**Clase III** Máquinas grandes con masas en rotación en fundamentos rígidos  
**Clase IV** Máquinas grandes con masas en rotación en fundamentos flexibles

De lo antes expuesto se infiere que el análisis vibracional es la base sobre la cual se sustenta el mantenimiento predictivo en las empresas industriales, por lo que se hace evidente la necesidad que tiene todo el personal encargado de introducir estas técnicas en la industria del conocimiento de la teoría sobre las vibraciones y su relación con las señales que emiten los sistemas mecánicos durante la operación, lo que permitirá la interpretación correcta de los resultados del procesamiento.



**Análisis  
de  
Señales  
2**

## **2.1 Introducción.-**

En un sistema mecánico ideal no existe disipación de energía durante los procesos de transmisión o conversión de la misma. En ellos están ausentes las causas que provocan esas pérdidas. Por el contrario, en los sistemas mecánicos reales surgen fuerzas excitadoras causantes de la disminución de la energía útil que es entregada por el sistema.

Las vibraciones que experimentan los sistemas mecánicos manifiestan la presencia de fuerzas excitadoras.

Los sistemas reales además de tener masa, tienen en mayor o menor grado elasticidad. Luego, cuando el sistema es desplazado de su posición inicial producto de la acción de esas fuerzas, surge otra en sentido contrario que trata de retornarlo a su posición inicial, provocando de esta forma un movimiento oscilatorio alrededor de las condiciones de equilibrio.

Durante este movimiento oscilatorio el sistema disipa cierta cantidad de energía, tomando especial interés su comportamiento en resonancia.

Sobre el comportamiento vibracional de los sistemas influirán tanto sus características constructivas como sus características de trabajo, pues de ellas dependen las particularidades que presentan las fuerzas excitadoras que surgen en los distintos componentes estructurales de los mismos durante la operación.

Ahora bien, las vibraciones no son sólo propiedad de los sistemas mecánicos. Todos los sistemas físicos tienen la propiedad de vibrar y estas vibraciones serán el reflejo de su comportamiento dinámico. Por esta razón, las vibraciones emitidas tendrán una forma de representación que caracterizará al sistema del cual procede. En la medida que los sistemas sean más complejos, la

forma que adquiere la representación de sus movimientos también lo será, necesitándose para su descripción más de una coordenada independiente.

Las coordenadas independientes, también llamadas grados de libertad, están caracterizadas en los sistemas oscilatorios por tener un modo principal de vibración. Los sistemas con más de un grado de libertad pueden ser representados por la superposición de sus modos principales y en los casos en que el sistema sea lo suficientemente rígido puede simplificarse a un grado de libertad reduciéndose así el número de coordenadas independientes necesarias para su descripción.

Es tarea del especialista poder identificar y determinar los fenómenos que tienen lugar en los sistemas mecánicos observando y midiendo los parámetros vibratoriales a través del procesamiento y análisis de las señales emitidas por los mismos durante su funcionamiento. Por ejemplo, si el sistema está en perfectas condiciones técnicas la señal emitida por el mismo reflejará ese comportamiento, resultando su representación una onda de pequeña amplitud cuando es comparada con otros gráficos patrones brindados por las normas o contruidos al efecto.

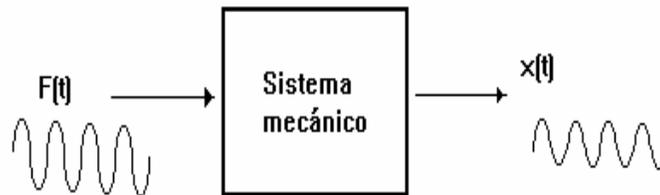
Precisamente, a través de esta relación ha sido establecida una clasificación para las señales resultando dos grandes grupos. El primer grupo está integrado por todas aquellas señales que representan un fenómeno que puede ser descrito por una expresión matemática relativamente sencilla en cualquier instante de tiempo y son denominadas **determinísticas**. El resto de las señales se denomina **no determinísticas o aleatorias**.

Las señales determinísticas pueden subdividirse a su vez en dos grupos:

- a) señales periódicas
- b) señales no periódicas.

En este contexto serán estudiadas las señales emitidas por tres sistemas mecánicos básicos mediante modelos que se comportan linealmente respecto a la excitación recibida. De esta forma podrán ser determinadas las soluciones exactas de las ecuaciones que rigen los movimientos en estos sistemas mediante el empleo de las propiedades de las ecuaciones diferenciales lineales.

Si los desplazamientos que tienen lugar en los sistemas mecánicos cuando sobre él actúan fuerzas excitadoras son pequeños, puede considerarse que el comportamiento del mismo es lineal ante esa perturbación, como se muestra en la figura 2.1.



**Fig. 2.1. Representación de un Sistema Lineal**

Si sobre el sistema actúa más de una fuerza excitadora, el principio de superposición permitirá determinar su respuesta de acuerdo a:

$$x(t) = f[F_1(t) + F_2(t) + \dots + F_m(t)]$$

a)

$$x(t) = \sum_{n=1}^m f[F_n(t)]$$

donde :

$F(t)$  ; representa a la fuerza excitadora

$x(t)$  ; la respuesta del sistema.

La solución de la ecuación (a) puede obtenerse considerando a cada fuerza  $F_i(t)$  como el producto de una función  $f(\tau)$  denominada función de peso, por la función de respuesta del sistema representada como  $h(t-\tau)$ .

Esta solución es igual, matemáticamente a la integral de convolución, ecuación (2.1) y representa el principio de superposición cuando el número de fuerzas excitadoras es suficientemente grande.

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(t - \tau)F(\tau)d\tau \quad (2.1)$$

donde:

$h(t - \tau)$  ; es la función respuesta del sistema

b)

$$x(t) = f(\lambda \cdot F_1(t) + \lambda \cdot F_2(t))$$

$$x(t) = \lambda[f_1(F_1(t)) + f_2(F_2(t))]$$

Las ecuaciones planteadas en el inciso (b) describen la propiedad conmutativa que también es muy utilizada en la interpretación de los sistemas físicos reales. En este caso  $\lambda$  es una magnitud constante que tiene la peculiaridad de preservar la frecuencia de la función de entrada, o sea, la frecuencia con que la fuerza excitadora perturba el sistema.

Para comprobar este planteamiento se describirá el comportamiento del sistema mediante el parámetro velocidad y aceleración a partir de la ecuación (2.1). Si la respuesta del sistema se expresa como su desplazamiento, la respuesta en velocidad o aceleración se obtendrán derivando esa expresión, la cual tomará la forma representada por (2.2).

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \int_0^{\infty} h(t - \tau) \frac{d^n F(\tau)}{d\tau^n} d\tau \quad (2.2)$$

donde n es el orden de la derivación.

Si se asume que la función de entrada al sistema es igual a una función seno, entonces se tendrá que:

$$F(t) = A \text{sen}(2\pi \cdot f \cdot t + \Theta)$$

que al ser representada en forma compleja será igual a:

$$F_{(\omega)} = F_0 e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (2.3)$$

a) para la respuesta expresada en velocidad será igual a:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_0^{\infty} h(t - \tau)(i\omega) F_0 e^{i \cdot \omega \cdot t} d\tau$$

b) y la respuesta expresada en aceleración será igual a:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \int_0^{\infty} h(t - \tau)(i\omega)^2 F_0 e^{i \cdot \omega \cdot t} d\tau$$

de donde se puede resumir a partir del resultado obtenido en los incisos (a) y (b) que la expresión general para la respuesta del sistema será igual a:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = (i\omega)^n \int_0^{\infty} h(t - \tau) F_0 e^{i \cdot \omega \cdot t} d\tau \quad (2.4)$$

De la ecuación (2.4) se puede concluir que la respuesta de los sistemas lineales tiene el mismo comportamiento que la función de entrada, o sea, la respuesta es una oscilación de igual frecuencia, sólo ha sido modificada la amplitud (término constante) y la fase expresada por  $i^n$

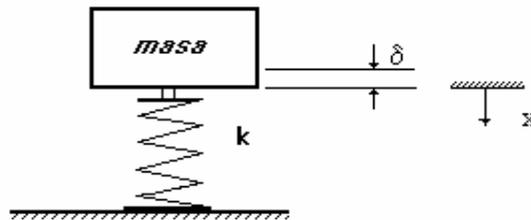
## 2.2 Señales Periódicas.

Las señales determinísticas periódicas son las que caracterizan a los sistemas mecánicos cuyos movimientos oscilatorios se repiten cada cierto período de tiempo completándose un ciclo en cada intervalo. Dentro de esta clasificación el **Movimiento Armónico Simple (MAS)** reviste

gran interés, ya que a partir del estudio de este sencillo modelo pueden establecerse relaciones para aquellos sistemas que resulten más complejos.

A partir de este análisis se podrá establecer que todos los sistemas descritos por una estructura matemática similar tendrán un movimiento armónico simple y serán descritos por una sola coordenada independiente, o sea, tendrán un sólo grado de libertad. Esto significa que el sistema formado por una sola masa al ser excitado se trasladará a lo largo de una sola dirección, luego para describir su movimiento sólo será necesario determinar la coordenada a través de la cual se traslada.

En la figura 2.2 se muestra el clásico sistema masa resorte de donde son obtenidas las propiedades de los sistemas con movimiento armónico simple.



**Fig. 2.2. Sistema masa resorte con MAS**

Cuando la masa del sistema mostrado en la figura 2.2 es desplazada de su posición de equilibrio una pequeña distancia  $x$ , surge sobre ella una fuerza que se opone al movimiento. Esta fuerza de naturaleza elástica le imprimirá al sistema una cierta velocidad para que recupere su posición inicial de equilibrio

Aplicando la segunda ley de Newton al sistema mostrado (considerando la masa del muelle despreciable y la ausencia de fricción con el aire que lo rodea) puede plantearse el balance de fuerzas que actúan sobre el mismo.

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} ; \quad \Sigma F_x = -k(x + \delta) + mg \quad (2.5)$$

$$-kx - k\delta + mg = m\ddot{x} \quad (2.6)$$

donde: K; constante de rigidez del sistema (muelle)

$$k\delta = mg; \text{ para el equilibrio est\u00e1tico.}$$

por lo tanto, la ecuaci\u00f3n (2.6) tomar\u00e1 la siguiente forma:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.7)$$

que reagrupando quedar\u00e1 igual a:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad ; \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.8)$$

donde :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}; \text{ representa la frecuencia angular natural del sistema.}$$

La ecuaci\u00f3n (2.8) puede ser resuelta aplicando las propiedades de las ecuaciones diferenciales lineales homog\u00e9neas de segundo orden. En este caso la soluci\u00f3n general es del tipo sinusoidal.

$$x(t) = B \text{sen}(\omega_0 t) + C \text{cos}(\omega_0 t) \quad (2.9)$$

donde las constantes B y C pueden ser evaluadas por las condiciones iniciales del sistema.

$$\text{para } t = 0 \\ x_{(0)} = C \quad \dot{x}_{(0)} = \omega_0 B$$

sustituyendo los valores de A y B en la ecuaci\u00f3n general se tendr\u00e1 lo siguiente:

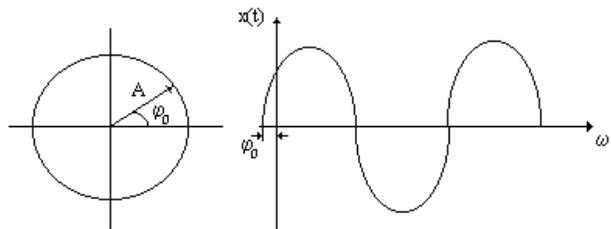
$$x(t) = \frac{x_{(0)}}{\omega_0} \text{sen } \omega_0 t + x_{(0)} \text{cos } \omega_0 t \quad (2.10)$$

Analizando este resultado se puede plantear que el sistema al comenzar su movimiento puede partir de una posición inicial  $x_{(0)}$  y tener una velocidad inicial. Como medio de representación gráfica del MAS será utilizado el diagrama fasorial mostrado en la figura 2.3, lo que facilitará el análisis de la señal en el tiempo.

De la figura 2.3 se observa que los términos  $x_{(0)}$  y  $\frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega_0}$  representan las proyecciones en la dirección horizontal y vertical de la posición del sistema en el instante inicial.

Estos desplazamientos iniciales pueden ser expresados, por lo tanto, en dependencia del ángulo de fase inicial  $\varphi_0$  y de la amplitud  $A$ .

$$\begin{aligned} \frac{x_{(0)}}{\omega_0} &= A \cos \varphi_0 \\ x_{(0)} &= A \operatorname{sen} \varphi_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$



**Fig. 2.3. Representación del movimiento armónico simple**

Este resultado facilitará la solución general de la ecuación diferencial (2.9) que representa el desplazamiento de un sistema con MAS, tomando finalmente la forma dada por la ecuación (2.12).

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega.t + \varphi_0) \quad (2.12)$$

La amplitud y el ángulo de fase inicial son dos magnitudes independientes y pueden ser evaluadas a partir de las condiciones iniciales. De las ecuaciones (2.11) y (2.12) se tiene lo siguiente:

$$\frac{x(0)}{A} = \text{sen}\varphi_0 \quad ; \quad \frac{\dot{x}(0)}{A\omega} = \text{cos}\varphi_0$$

$$\text{sen}^2 \varphi_0 + \text{cos}^2 \varphi_0 = 1$$

de donde la amplitud A será igual a:

$$A = \sqrt{x(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega}\right)^2} \tag{2.13}$$

y el ángulo de fase inicial:

$$\varphi_0 = \arctan \frac{\dot{x}(0)\omega}{x(0)} \tag{2.14}$$

Conocida la ecuación que describe el desplazamiento pueden ser determinadas las ecuaciones que describan la velocidad y la aceleración:

velocidad  $\dot{x}(t) = A\omega \text{cos}(\omega.t + \varphi_0)$  (2.15)

aceleración  $\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \text{sen}(\omega.t + \varphi_0)$  (2.16)

Otro parámetro importante del MAS es el período de la oscilación T. El periodo de la oscilación T se define como el tiempo que demora el sistema en retornar a sus condiciones iniciales describiendo de esta forma un ciclo. Para el movimiento descrito anteriormente significa realizar un recorrido igual a  $2\pi$  radianes.

Si para  $t = 0$  la posición del sistema está dada por el ángulo  $(\omega.t + \varphi_0)$  para un tiempo posterior igual a un período la posición será igual a  $[\omega.(t + T) + \varphi_0]$

de donde se tendrá que:

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = \omega.t + \varphi_0 + 2\pi \quad (2.17)$$

que al simplificar quedará como:

$$\omega T = 2\pi \quad T = 2\pi/\omega \quad (2.18)$$

A partir del período de oscilación se define otro parámetro característico del movimiento oscilatorio, la frecuencia. La frecuencia propia o frecuencia natural del sistema oscilatorio es el número de repeticiones por segundo que efectúa el mismo durante el movimiento y será igual al valor inverso del período T.

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

sustituyendo la ecuación (2.18) en esta definición se obtendrá la expresión que permite determinar el valor de la frecuencia en dependencia de la constante de rigidez y la masa del sistema.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.19)$$

Del análisis anterior se puede concluir que las magnitudes  $\omega$ ,  $\pi$  y T son propiedades del sistema oscilatorio por depender solamente de su masa y rigidez.

### 2.2.1. - Señales periódicas complejas.

Los sistemas físicos reales pueden estar sometidos a la acción simultánea de más de una fuerza excitadora. Las características de estas fuerzas pueden ser tales que provoquen en el sistema un movimiento que resulte de la combinación de varios MAS con frecuencias que resultan múltiplo del modo principal de vibración. La trayectoria resultante del sistema oscilatorio, o sea, la forma de la onda de la señal, dependerá entonces de la forma en que estas oscilaciones sean combinadas.

Con pocas excepciones, la representación matemática de estos sistemas puede venir dada por la serie de Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t) + b_n \operatorname{sen}(2\pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t) \quad (2.20)$$

donde :

$f_1$  ; es la frecuencia fundamental, o sea la frecuencia del primer armónico

$a_0$  ,  $a_n$  Y; son los coeficientes de la serie

Simplificando la ecuación (2.20) se tendrá entonces la ecuación del movimiento para la combinación de n oscilaciones:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t - \theta_n) \quad (2.21)$$

donde:

$X_0$  ; es el coeficiente constante de la serie

$X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ; representan la amplitud de la señal

$\theta_n = \operatorname{arctn}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$  ; representa el ángulo de fase

Como ejemplos de señales periódicas complejas se estudiarán sistemas oscilatorios con dos oscilaciones armónicas combinadas.

### **2.2.2 - Combinación de oscilaciones de igual frecuencia.**

Los desplazamientos de los movimientos armónicos que serán combinados en este estudio estarán descritos por las ecuaciones cosenoidales dadas por (2.22).

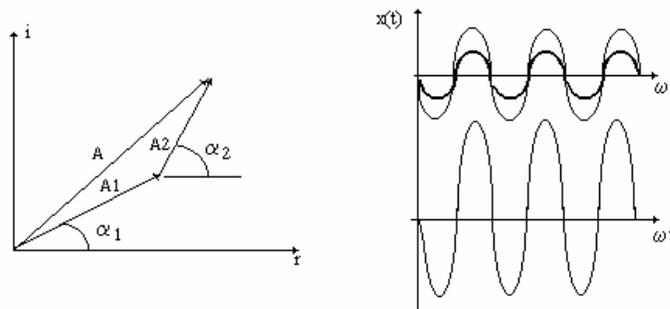
$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega.t + \alpha_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega.t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sustituyendo en la serie de Fourier para (n) igual a 2, el desplazamiento resultante será:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(\omega.t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega.t + \alpha_2) \\ x(t) &= \sum_{n=1}^2 X_n \cos(\omega.t + \alpha_n) \end{aligned} \quad (2.23)$$

De la ecuación (2.23) se observa que el movimiento resultante de esta combinación también es un movimiento armónico de igual período, sólo han variado la amplitud y la fase. Aquí la componente estática no es considerada, ya que sólo se estudia el comportamiento oscilatorio del sistema.

Para lograr una mayor claridad en el estudio de estos sistemas, será empleada la notación fasorial mostrada en la Fig. 2.4.



**Fig. 2.4 Composición de dos sistemas de igual frecuencia.**

De la figura 2.4 se aprecia que mediante relaciones trigonométricas es posible obtener la amplitud y el ángulo de fase del movimiento resultante.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2.24)$$

$$A \operatorname{sen} \alpha = A_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + A_2 \operatorname{sen} \alpha_2 \quad (2.25)$$

### 2.2.3. - Combinación de movimientos oscilatorios de frecuencias diferentes.

En este caso no se tomarán en cuenta los ángulos de fase para simplificar el análisis de los resultados, siendo las ecuaciones de las ondas que se combinan, iguales a:

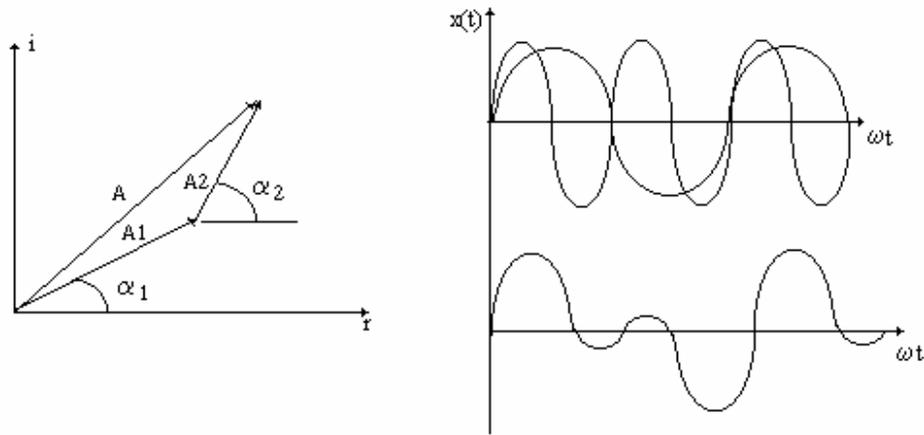
$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) \quad ; \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t) \quad (2.26)$$

por lo que para el movimiento combinado el desplazamiento resultante vendrá dado por la suma de ambas como:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) \quad (2.27)$$

El gráfico fasorial para esta combinación será igual al mostrado en la figura 2.4, pero ahora las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son diferentes. Esta desigualdad en las frecuencias puede provocar en el movimiento resultante una forma muy compleja, con una amplitud dependiente de la posición instantánea del fasor que representa a cada una de las amplitudes de las ondas combinadas. En la figura 2.5 se muestra el gráfico de la combinación de dos ondas con frecuencias diferentes, así como su diagrama fasorial. En este se puede apreciar la combinación de las mismas dando como resultado una nueva onda de amplitud A.

$$A^2 = A_1^2 \pm A_2^2 \pm 2 A_1 A_2 \cos(\omega_1 t - \omega_2 t)$$



**Fig. 2.5. Oscilación resultante para la combinación de dos MAS con diferentes frecuencias.**

Para que el movimiento resultante pueda ser descrito como un movimiento periódico, será necesario que los períodos de las oscilaciones combinadas sean múltiplos de la oscilación resultante, para lo que deberá cumplirse a siguiente condición:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

donde :

$n_1, n_2$ ; son los valores más pequeños que satisfacen esa relación.

$T_1, T_2$ ; son los períodos de las oscilaciones  $x_1, x_2$

Existen valores de la relación entre las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  que influyen notablemente en la característica del movimiento oscilatorio resultante.

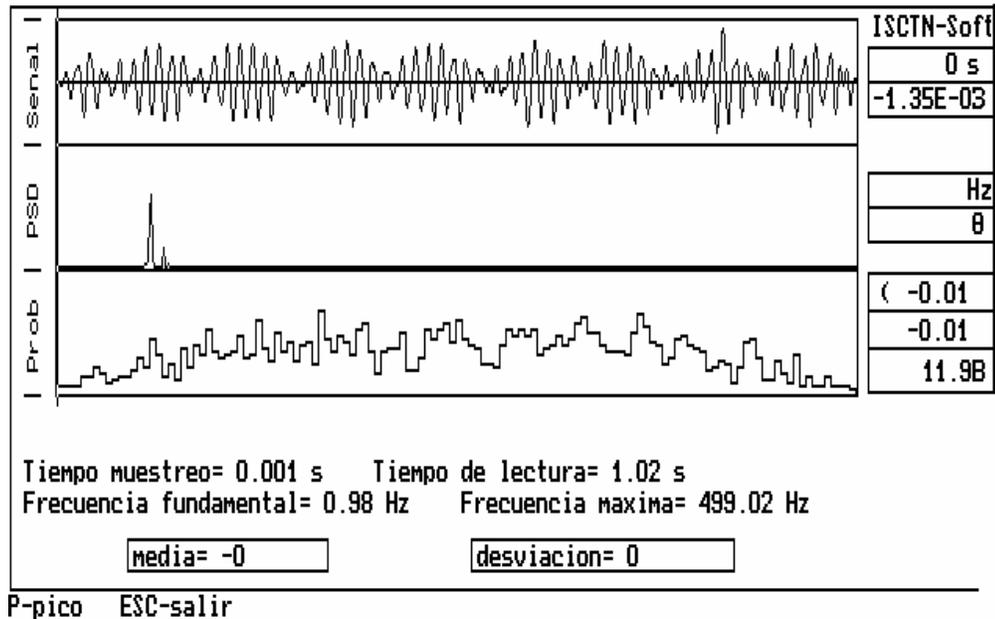
Por ejemplo, sean consideradas dos oscilaciones cuyas frecuencias tienen valores cercanos. Si las amplitudes son iguales el resultado será el siguiente:

$$x(t) = A[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \quad (2.28)$$

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Analizando la ecuación (2.28) se puede apreciar que existe una combinación dada por una onda de frecuencia igual a  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  y otra de frecuencia igual a  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  en la respuesta del sistema. Al comparar estas dos frecuencias,  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  y  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  se observa que existe un rango de valores para los cuales ocurre el fenómeno de la pulsación, que se caracteriza porque la onda de mayor frecuencia es modulada por la de menor frecuencia. Esto significa que para un período completo de la onda de mayor frecuencia ocurre un semiperíodo de la onda de menor frecuencia.

Si las ondas combinadas son sonoras, el sonido resultante tendrá una frecuencia igual a  $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) / 2\pi$  pasando por un máximo cada  $\pi / \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)$  segundos. Si las vibraciones provienen de un sistema mecánico, las vibraciones pulsantes pueden acelerar el deterioro de los elementos estructurales, sobre todo si son excitadas las frecuencias naturales.



**Fig. 2.6. Pulsaciones obtenidas de la combinación de ondas con frecuencias próximas.**

#### 2.2.4. Combinación de oscilaciones perpendiculares entre sí con igual frecuencia.

Anteriormente fueron estudiadas combinaciones de sistemas oscilatorios donde las ondas viajaban en la misma dirección. Cuando las ondas viajan en direcciones perpendiculares entre sí se obtienen combinaciones que resultan de una gran complejidad. Sin embargo, este comportamiento es de gran utilización práctica porque puede ser utilizado para el estudio de sistemas estáticos. En este caso es posible determinar una frecuencia desconocida conociéndose la otra frecuencia y la forma de onda del movimiento resultante.

Para los desplazamientos dados por las ecuaciones (2.28) se podrán obtener diferentes formas de ondas resultantes en dependencia de la relación entre las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  así como entre los ángulos.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A_1 \cos(\omega \cdot t + \alpha_1) \\
 y(t) &= A_2 \cos(\omega \cdot t + \alpha_2)
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

Si las frecuencias de las oscilaciones son iguales, las trayectorias serán sólo función de las fases. Transformando las ecuaciones (2.29) se obtiene la expresión de la trayectoria resultante, que será igual a:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2.30)$$

La ecuación (2.30) representa la ecuación general de la elipse, la cual toma la forma de figuras geométricas conocidas al sustituir valores significativos en la relación de los ángulos de fases.

a) Para  $(\alpha_2 - \alpha_1) = \pm 2n\pi$        $n= 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0 \quad (2.31)$$

$$y = \frac{A_1}{A_2} x$$

como se aprecia de este resultado, la ecuación (2.31) representa a una recta con pendiente igual a la relación entre las amplitudes. Queda por demostrar si la oscilación resultante responde a las propiedades del movimiento armónico. Como las oscilaciones son perpendiculares entre sí, el desplazamiento resultante puede ser escrito de forma general mediante la relación trigonométrica siguiente:

$$\begin{aligned} z(t) &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(A_1^2 + A_2^2) \cos^2(\omega t + \alpha)} \\ z(t) &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega t + \alpha) \\ z(t) &= A \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde :

A; es la amplitud de la onda resultante

$\alpha$  ; es el ángulo de fase resultante de la combinación de las ondas iniciales con ángulos de defasaje  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

con lo que queda demostrado que el movimiento resultante es también armónico.

b) Para la relación  $(\alpha_2 - \alpha_1) = \pm(2n + 1)\pi$  el análisis es similar al anterior, sólo que la recta obtenida es de pendiente negativa.

c) Para la relación  $(\alpha_2 - \alpha_1) = \pm(2n + 1)\frac{\pi}{2}$  se tendrá lo siguiente:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (2.33)$$

El resultado dado por la ecuación (2.33) representa la ecuación de una elipse, cuyos ejes principales coinciden con las direcciones de las oscilaciones combinadas. También pueden encontrarse las condiciones dadas por 1 y 2.

1) Para  $(\alpha_2 - \alpha_1) > \pi$

El movimiento mediante el cual se describe la elipse tendrá el mismo sentido que el movimiento de las agujas del reloj.

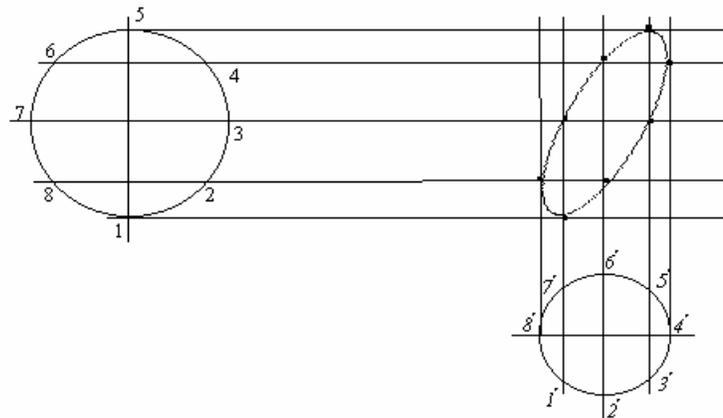
2) Para:

El sentido del movimiento mediante el cual se describirá a la elipse será opuesto al movimiento de las agujas del reloj.

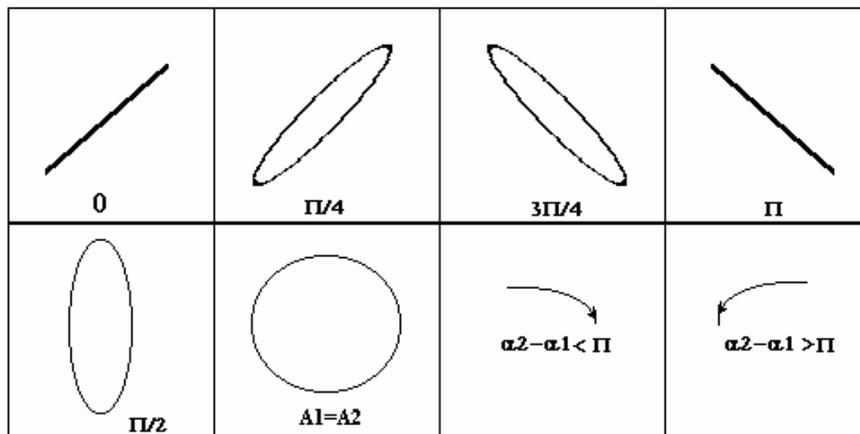
Si en ambos casos se cumple que las amplitudes de las dos ondas son iguales, entonces la trayectoria obtenida será igual a una circunferencia.

Cualquier otra combinación entre  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  dará como resultado una elipse, cuyos ejes principales estarán rotados respecto a las direcciones de las oscilaciones combinadas, como se muestra en la figura 2.7(b).

a) Desarrollo de una elipse a partir de dos oscilaciones de frecuencias diferentes desfasadas entre sí.



b)

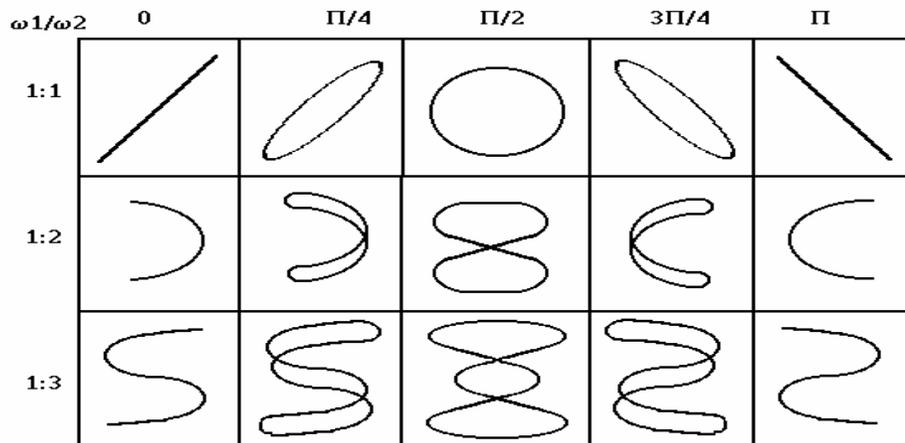


**Fig. 2.7. Desplazamiento resultante para una combinación de dos oscilaciones perpendiculares. a) generación de la elipse. b) Diversas relaciones de  $(\alpha_2 - \alpha_1)$**

### 2.2.5. - Combinación de oscilaciones perpendiculares entre sí de frecuencias diferentes

Cuando los MAS que se combinan tienen amplitud, fase y frecuencia diferentes, las figuras geométricas que describen la trayectoria del sistema pueden tomar formas inimaginables.

Fue J.A.Lissajous (1822-1880) el precursor del estudio del comportamiento de estas oscilaciones, de ahí que estas figuras reciban el nombre de figuras de Lissajous. La forma de construcción de estas figuras sigue el mismo principio descrito en la figura 2.7.



**Fig. 2.8. Figuras de Lissajous**

En la figura 2.8 se observa un grupo de figuras obtenidas para diferentes relaciones entre los ángulos de fase ( $\alpha_2 - \alpha_1$ ) y las frecuencias. Las figuras de la primera fila corresponden a las analizadas cuando  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son iguales.

### 2.3 - Señales determinísticas no periódicas.

A este grupo corresponden las señales que provienen de los sistemas que presentan movimientos oscilatorios cuasi periódico y de los sistemas donde se producen movimientos transitorios.

### **2.3.1-Vibraciones cuasiperiódicas.**

Las vibraciones cuasiperiódicas pueden ser descritas por una suma de senos y cosenos cuyas frecuencias no guardan relación alguna entre sí.

Si la trayectoria resultante del movimiento oscilatorio cuasiperiódico viene dada por una suma de cosenos, como por ejemplo

$$x(t) = A_1 \cos(2t + \alpha_1) + A_2 \cos(3t + \alpha_2) + A_3 \cos(7t + \alpha_3) \quad (2.34)$$

entonces se puede plantear que la misma responde a la forma general de la serie de Fourier, pero con la característica de que las frecuencias no se relacionan entre ellas.

$$x(t) = \sum_{n=1}^m X_n \cos(2 \pi. f_n t + \alpha_n) \quad (2.35)$$

donde:

$$\frac{f_n}{f_m} \neq \text{a un número entero}$$

Un ejemplo de un sistema portador de este movimiento es el motor asincrónico.

### **2.3.2. - Señales transitorias.**

Las señales transitorias tienen lugar cuando el sistema es sometido a la acción de fuerzas excitadoras que actúan un breve período de tiempo. Las fuerzas excitadoras provocan vibraciones que tienden a desaparecer un tiempo después que cesa la acción de las mismas. Debido a este comportamiento, la amplitud de la vibración variará desde un valor máximo a un valor mínimo. Como ejemplos de señales transitorias pueden citarse las emitidas por los sistemas con vibraciones amortiguadas.

### 2.3.2.1 - Vibración libre amortiguada.

Los sistemas con movimiento armónico simple no disipan energía durante la oscilación. Sin embargo, todo sistema real lleva implícita la existencia de fuerzas disipativas debido a lo cual el movimiento armónico simple cesa después que ha transcurrido cierto período de tiempo. Estas fuerzas disipativas son el reflejo de la existencia del amortiguamiento en el sistema.

La vibración libre amortiguada es un modelo simplificado del comportamiento de los sistemas reales cuando sobre los mismos actúan fuerzas excitadoras con períodos muy pequeños de duración. De esta forma el sistema es estudiado a partir del cese de esa acción.

Las propiedades de estos sistemas serán determinadas considerando el amortiguamiento de carácter viscoso que es proporcional a la velocidad.

Si a la figura 2.2 que representa el modelo de un sistema con movimiento armónico simple se le agrega el efecto del amortiguamiento, la misma quedará como se muestra la figura 2.9.

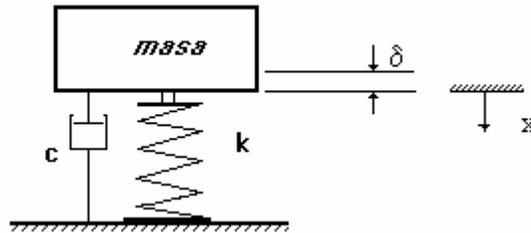


Fig. 2.9. Sistemas con vibración libre amortiguada

Aplicando la segunda ley Newton al sistema se obtiene lo siguiente:

$$\sum F_x = kx - c \dot{x} = m \ddot{x}$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} - kx = 0 \quad (2.36)$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \omega^2 x = 0$$

donde:

$c$  ; es el amortiguamiento del sistema.

$\gamma = \frac{c}{m}$  ; representa al coeficiente de amortiguamiento del sistema.

La ecuación (2.36) puede ser resuelta empleando la ecuación característica (2.37) y considerando que la solución viene dada por la ecuación de Euler.

$$\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)e^{st} = 0 \quad (2.37)$$

Esta ecuación tiene dos raíces y pueden ser obtenidas mediante la expresión siguiente:

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{4ad}{4}\right)} \quad (2.38)$$

donde:

$$b = \frac{c}{m} \quad ; \text{son los coeficientes de la ecuación diferencial (2.37).}$$

$$d = \frac{k}{m}$$

sustituyendo los coeficientes en la ecuación (2.38) se tendrá lo siguiente:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (2.39)$$

cuya solución responde a la forma general dada por:

$$x = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (2.40)$$

De la ecuación (2.40) se observa que de acuerdo a la relación que guarden los valores bajo la raíz, así será el comportamiento del sistema con vibraciones libres amortiguadas. A continuación serán analizados esos casos.

a) si se cumple que  $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$  las raíces resultantes serán complejas y desiguales

Entonces las soluciones vendrán dadas por:  $S_{1,2} = \alpha \pm i\omega$

de donde los valores de los coeficientes  $\alpha$  y  $\omega$  serán iguales a:

$$\alpha = -\frac{c}{2m} \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

Al sustituir en la ecuación (2.40) estas expresiones, se podrá determinar la solución de la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio libremente amortiguado para esta situación.

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{(\alpha+i\omega)t} + A_2 e^{(\alpha-i\omega)t} \\ x &= e^{\alpha t} \left[ (A_1 + A_2) \cos \omega.t + (A_1 - A_2) j \operatorname{sen} \omega.t \right] \\ x &= A e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\omega.t + \varphi) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Del resultado anterior se puede concluir que la trayectoria del sistema amortiguado está caracterizada por un movimiento oscilatorio que tiende exponencialmente a desaparecer.

Los sistemas que presentan este comportamiento reciben el nombre de sistemas subamortiguados o inframortiguados.

b) Si se cumple que  $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$  las raíces serán reales y desiguales, por lo que la solución será igual a la suma de dos exponenciales. En este caso el sistema no oscila, sino que retorna lentamente a su posición de equilibrio y recibe el nombre de sistema sobreamortiguado.

$$x = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

donde :

$$s_1 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.42)$$

$$s_2 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

sustituyendo la expresión de las raíces en la ecuación (2.40) se obtiene la ecuación del movimiento oscilatorio del sistema sobreamortiguado.

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left[ A_1 e^{-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}} t} + A_2 e^{\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}} t} \right] \quad (2.43)$$

c) Si se cumple que  $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$  el sistema tendrá como respuesta un movimiento que tiende exponencialmente a desaparecer, pero la posición de equilibrio no se alcanza tan lentamente como en el caso anterior.

Los sistemas que así se comportan reciben el nombre de sistemas con amortiguamiento crítico y la solución de la ecuación diferencial será igual a:

$$x(t) = (A_1 + A_2 \cdot t) e^{-\frac{c}{2m}t}$$

donde los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  pueden ser evaluados a partir de las condiciones iniciales. Entonces la ecuación del movimiento será igual a:

$$x(t) = \left[ x_{(0)} + \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} + x_{(0)} \right) \omega_0 t \right] e^{-\frac{c}{2m}t} \quad (2.44)$$

En la figura 2.10 se muestran graficadas las trayectorias del sistema para los casos analizados.

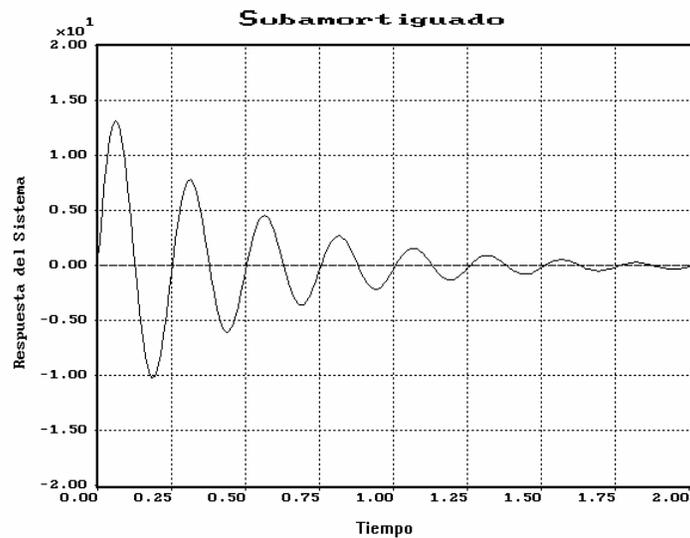
Partiendo de la condición  $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$  pueden obtenerse descriptores que caracterizan el comportamiento de los sistemas con vibraciones amortiguadas.

### **Amortiguamiento crítico:**

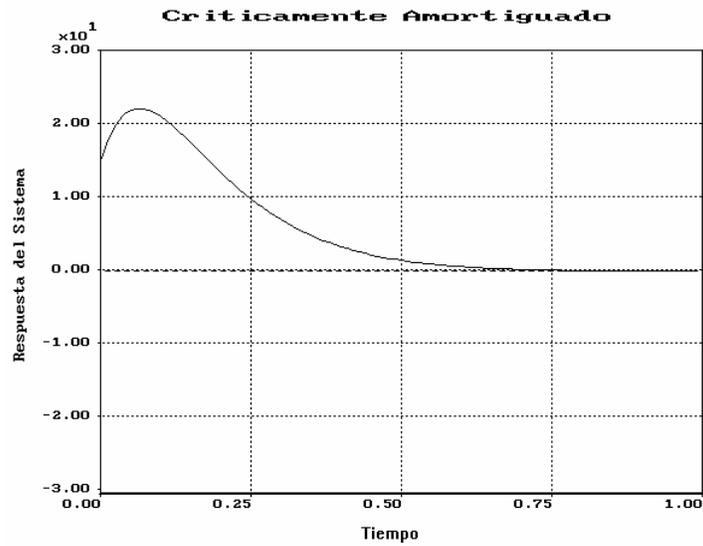
El amortiguamiento crítico es aquel que presentan los sistemas oscilatorios cuando son igualados los efectos de las fuerzas restauradoras elásticas y las fuerzas disipativas. Su expresión puede ser obtenida a partir de la igualdad anterior como sigue:

$$\frac{c_c^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \rightarrow c_c = 2\sqrt{km}$$

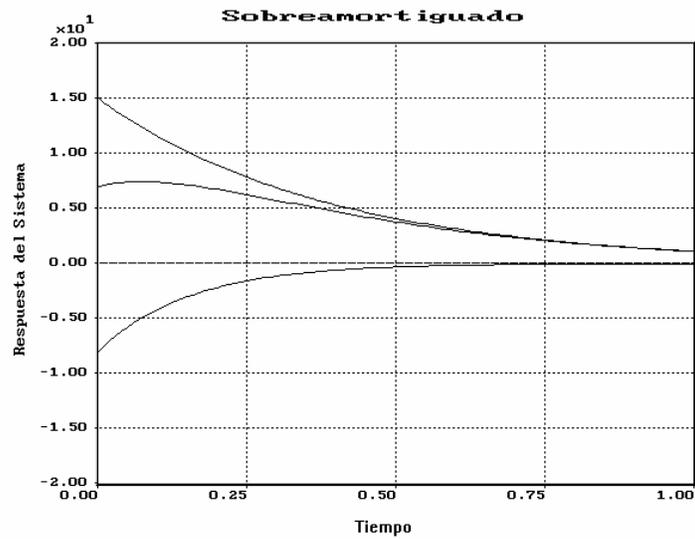
a)



b)



c)



**Fig. 2.10. Desplazamientos del sistema con oscilaciones libres amortiguadas a) subamortiguado b) con amortiguamiento crítico c) sobreamortiguado**

### **Razón de amortiguamiento**

La razón de amortiguamiento se obtiene de la relación entre el amortiguamiento del sistema y su valor crítico.

$$\xi = \frac{c}{c_c}$$

Partiendo de esta definición se puede establecer su dependencia con respecto a las características amortiguadoras del sistema mecánico descritas anteriormente.

$\xi = 0$	no existe amortiguamiento
$\xi < 1$	Subamortiguado
$\xi > 1$	sobreamortiguado
$\xi = 1$	Amortiguamiento crítico

### **Frecuencia angular de amortiguamiento**

Tomando como base las definiciones de amortiguamiento crítico y razón de amortiguamiento puede ser determinada una expresión que caracterice a la frecuencia del sistema cuando está presente el amortiguamiento. De estas relaciones se obtiene lo siguiente:

$$\frac{c}{2m} = \frac{\xi \cdot c_c}{2m} = \xi \omega_0$$

que al ser sustituida en la ecuación (2.42) permitirá establecer una nueva relación entre la trayectoria y las propiedades del sistema

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{(\xi\omega_0)^2 - \omega_0^2} \quad (2.45)$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm i\sqrt{(1 - \xi^2)} \cdot \omega_0$$

de donde por similitud con la solución dada por  $s_{1,2} = \alpha \pm i\omega$  se puede concluir que la frecuencia angular del sistema con oscilaciones libres amortiguadas será igual a:

$$\omega_c = \sqrt{(1 - \xi^2)} \cdot \omega_0 \quad (2.46)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.41) en la (2.46) se obtiene la expresión que describe el movimiento de los sistemas con vibraciones libres amortiguadas.

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}(\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_0 t + \phi) \quad (2.47)$$

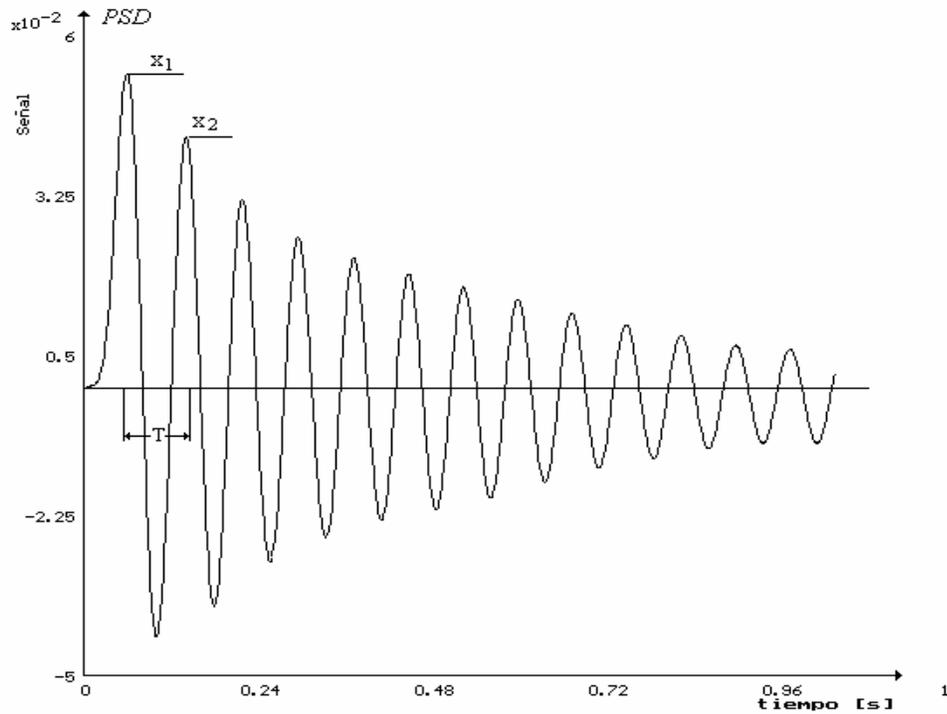
En el análisis de los sistemas subamortiguados es muy utilizado el criterio de decrecimiento logarítmico. Esta magnitud es un número adimensional que permite determinar la velocidad del decaimiento de la oscilación como una función del amortiguamiento del sistema y se define como el logaritmo de la relación de dos amplitudes sucesivas como se muestra en la figura 2.11.

En esta figura se aprecia que las amplitudes  $x_1$  y  $x_2$  corresponden a los valores que toma la ecuación del desplazamiento (2.47) cuando el tiempo es igual a. Por esta razón el coeficiente decremento logarítmico puede ser calculado como:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \frac{e^{-\xi\omega_0 t_1}}{e^{-\xi\omega_0 t_2}} = \xi\omega_0 T \quad (2.48)$$

donde

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(1 - \xi^2)} \cdot \omega_0} ; \text{ es el período de la oscilación amortiguada}$$



**Fig. 2.11. Determinación del decaimiento logarítmico**

Sustituyendo la expresión del período en la ecuación (2.48) la ecuación para el cálculo del decaimiento logarítmico tomará la siguiente forma:

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)}} \quad (2.49)$$

Como los valores de la razón de amortiguamiento son muy pequeños, con bastante aproximación se puede establecer la siguiente relación para el cálculo del decremento logarítmico:

$$\delta = 2 \pi \xi$$

la cual plantea una dependencia lineal entre ambas magnitudes.

### 2.3.2.2. Fuerzas impulsivas

Los sistemas reales pueden estar sometidos a fuerzas excitadoras causantes del comportamiento transitorio del mismo. Entre esas fuerzas excitadoras ocupa un lugar muy importante la del tipo impulsivo que surgen, entre otras causas, debido a los golpes entre las estructuras de un sistema mecánico.

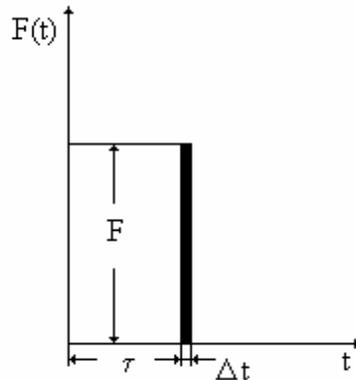
Una de las características de las fuerzas impulsivas es que tienen un tiempo de duración muy pequeño, pero son de elevada magnitud por lo que le imprimen al sistema una velocidad inicial que será proporcional a su masa y a su amortiguamiento. La fuerza impulsiva puede ser representada mediante la segunda ley de Newton de acuerdo a:

$$F(t) = ma \rightarrow F(t) = m \cdot dv / dt \quad (2.50)$$

de donde se puede evaluar el impulso provocado por la fuerza  $F(t)$  como sigue:

$$I = \int_t^{t+\Delta t} F(t) dt \quad (2.51)$$

De la figura (2.12) se observa que si  $\Delta t \rightarrow 0$ , la fuerza impulsiva tiende a valores infinitos para un impulso dado. Si el impulso  $I$  es igual a la unidad, entonces la fuerza impulsiva será unitaria cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y tomará las características de una función Delta  $\delta(t - \tau)$ .



**Fig. 2.12. Representación de la fuerza impulsiva**

Las fuerzas impulsivas provocan un desplazamiento inicial máximo a partir del cual el sistema se comporta con oscilaciones libres amortiguadas a la frecuencia de amortiguamiento. Las oscilaciones amortiguadas pueden ocurrir partiendo de dos condiciones, figura 2.13:

- El sistema estático es afectado por un golpe y retorna a su posición de equilibrio mediante una oscilación libre amortiguada.
- El sistema se encuentra bajo la acción de fuerzas excitadoras estables y al recibir la acción de la fuerza impulsiva aumenta su amplitud hasta un valor máximo para después regresar a las condiciones de vibraciones forzadas.

En este último caso la fuerza impulsiva provoca el mismo efecto que en los sistemas estáticos, pero al retornar a las condiciones iniciales el sistema tendrá la influencia de las fuerzas excitadoras presentes en el sistema dinámico.

En esta respuesta el amortiguamiento tiene una gran influencia. En dependencia del valor amortiguamiento así será la magnitud del desplazamiento inicial máximo del sistema. Este hecho puede expresarse mediante la ecuación de balance energético una vez que fue aplicada la fuerza impulsiva sobre el sistema

Energía cinética = Energía potencial + Energía disipada  
 inicial                      inicial

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = k \int_0^{x_{\max}} x dx + f(\xi, \omega_0, x) \quad (2.52)$$

Si se divide entre la masa se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \omega_0^2 \int_0^{x_{\max}} x dx + f'(\xi, \omega_0, x) \quad (2.53)$$

O sea, la energía que es entregada al sistema en forma de energía cinética se invierte una parte en energía potencial debido al desplazamiento y otra parte para vencer el efecto del amortiguamiento del sistema.

Para una fuerza impulsiva  $F(t)$ , se puede evaluar el término que representa la energía invertida en el amortiguamiento al ser comparados los máximos desplazamientos para un sistema sin amortiguamiento y con amortiguamiento los cuales vienen dados por las ecuaciones (2.12) y (2.47).

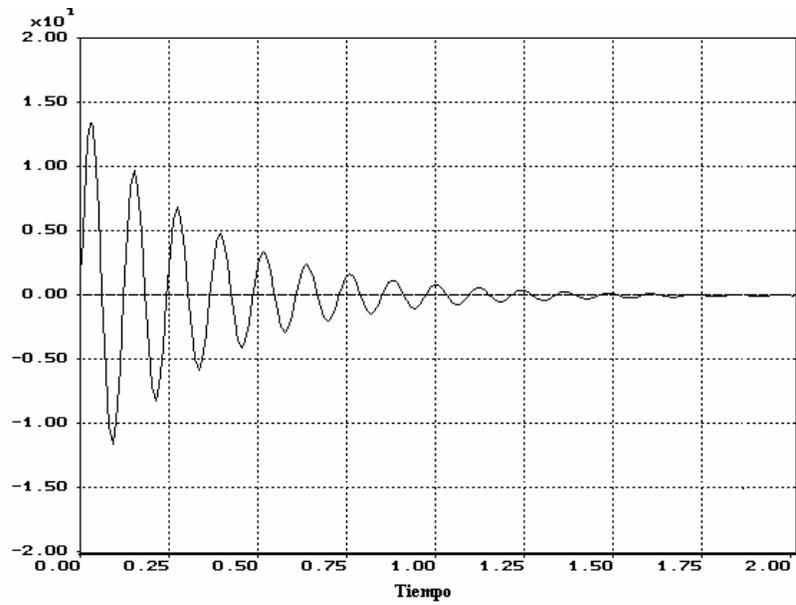
Si el sistema no presenta amortiguamiento su desplazamiento máximo tendrá un valor dado por la expresión:

$$x_{\max} = \frac{I}{m\omega_0} \quad (2.54)$$

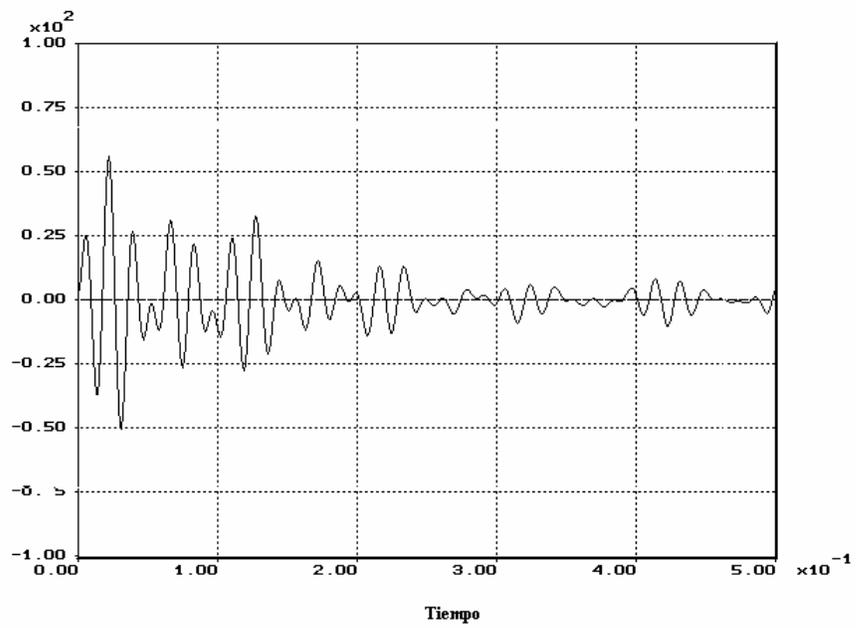
y para los sistemas con presencia de amortiguamiento será

$$x_{\max} = \frac{I}{m\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0 t} \quad (2.55)$$

a)



b)



**Fig. 2.13. Sistemas sometidos a la acción de una fuerza excitadora impulsiva. a) sistema estático. b) sistema dinámico.**

Comparando las ecuaciones (2.54) y (2.55) puede apreciarse que el desplazamiento para un sistema amortiguado es menor que para los sistemas sin amortiguamiento lo cual significa que el sistema invirtió parte de la energía inicial en energía liberada por el amortiguamiento dando como resultado un desplazamiento máximo menor. De esta forma la energía consumida por el amortiguamiento será igual a:

$$\begin{array}{rcl} \text{Energía potencial} & & \text{Energía potencial} & & \text{Energía} \\ \text{máxima sin} & - & \text{máxima con} & = & \text{disipada} \\ \text{amortiguamiento} & & \text{amortiguamiento} & & \end{array}$$

$$\frac{1}{2} k \left( \frac{I}{m\omega_0} \right)^2 - \frac{1}{2} k \left( \frac{I}{m\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0 t} \right)^2 = \frac{1}{2} \psi \cdot m \dot{x}_0^2 \quad (2.56)$$

donde  $\psi$  toma en cuenta la disminución de la energía inicial debido al amortiguamiento y será igual a:

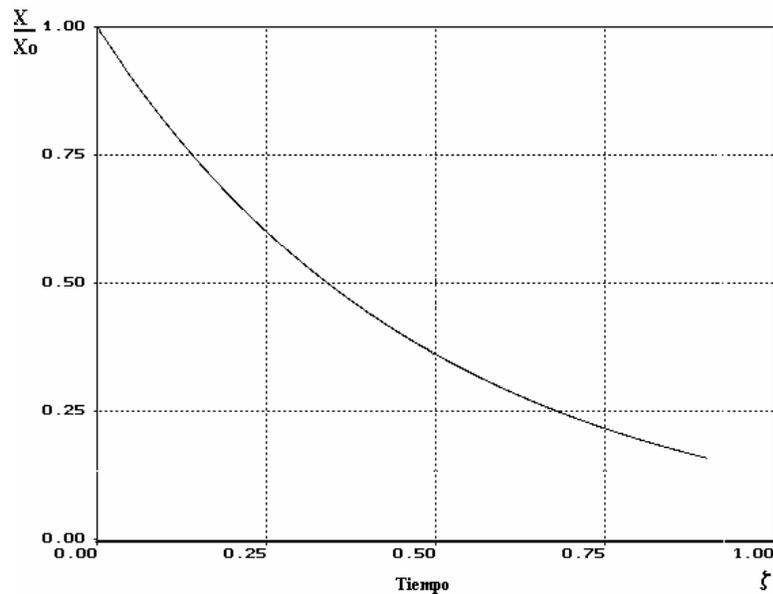
$$\psi = \left[ 1 - \left( \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)^2 \right] \quad (2.57)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.53) se obtendrá la expresión general de balance cuando el sistema amortiguado es excitado por una fuerza impulsiva.

$$\frac{1}{2} \dot{x}_0^2 = \omega_0^2 \int_0^{x_{max}} x dx + \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)^2 \right] \cdot \dot{x}_0^2 \quad (2.58)$$

En la figura 2.14 se muestra la dependencia de la amplitud máxima de desplazamiento respecto al valor de la razón de amortiguamiento. Para valores pequeños de  $\xi$  los valores de  $\frac{x}{x_0}$  son más

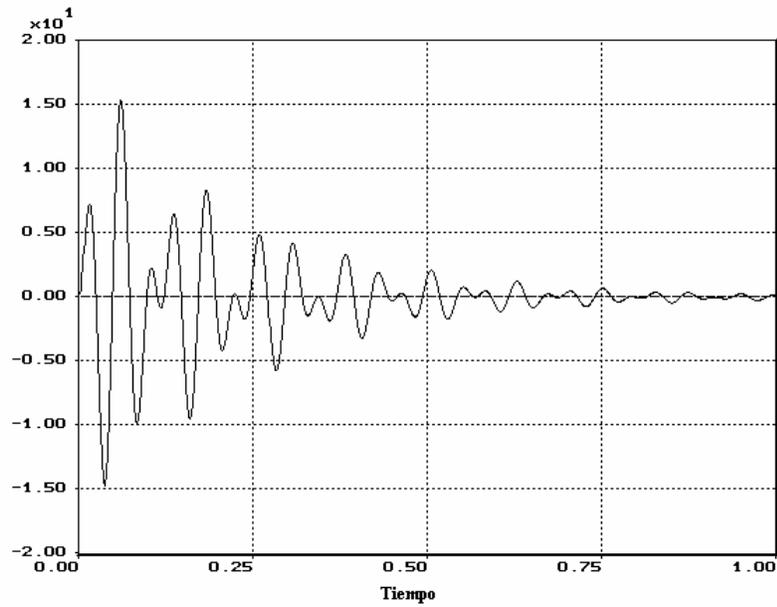
cercanos porque las fuerzas recuperadoras elásticas superan notablemente a las fuerzas disipativas. En la medida que  $\xi$  aumenta la relación  $\frac{x}{x_0}$  se va haciendo menor porque ya va disminuyendo la influencia de la componente elástica del sistema.



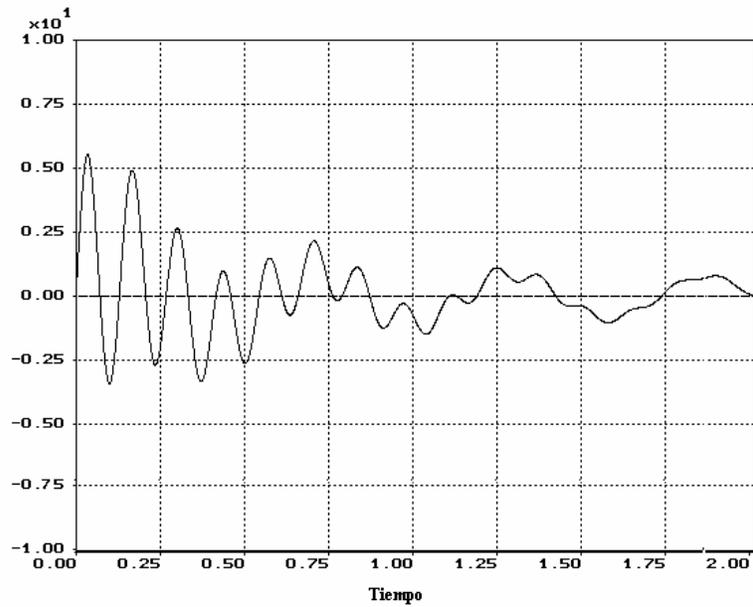
**Fig. 2.14. Relación entre el desplazamiento máximo y la razón de amortiguamiento  $\xi$ .**

En la respuesta transitoria del sistema no sólo influye el amortiguamiento, sino también la magnitud de la fuerza impulsiva. En dependencia de esto la respuesta del sistema puede reflejar un comportamiento complejo como se muestra en la figura 2.15 (b).

a) Excitada la frecuencia fundamental y otras frecuencias mayores a la fundamental



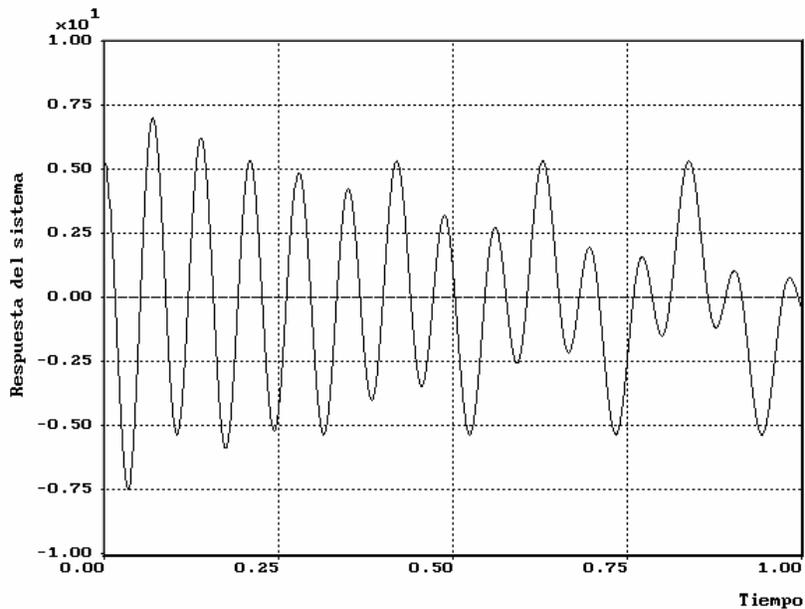
b) Excitada la frecuencia fundamental y una baja frecuencia.



**Fig. 2.15. Respuesta del sistema bajo la acción de una fuerza impulsiva de elevada magnitud**

En este caso la magnitud de la fuerza impulsiva provocó la excitación de otras frecuencias correspondientes a otros elementos estructurales, por lo que la trayectoria resultante adquiere la forma de una onda compleja a diferencia de la figura 2.15 (a) que sólo presenta a la frecuencia fundamental del sistema.

Además, para determinados valores de la fuerza impulsiva, la energía que ella le imprime al sistema puede provocar desplazamientos que sólo pueden ser descritos por expresiones donde la constante de rigidez y la constante de amortiguamiento son proporcionales al desplazamiento del sistema, de esta forma el sistema ya no podrá ser descrito por las ecuaciones que resultan de la solución de los sistemas lineales. En estos casos la ecuación del movimiento debe ser resuelta tomando en cuenta el efecto que está presente y por lo tanto el método matemático más conveniente para la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales que describan la trayectoria del sistema.



**Fig. 2.16. Trayectoria descrita por el comportamiento no lineal de un sistema mecánico**

Una de las formas que puede tomar la ecuación del movimiento no lineal viene dada por la siguiente expresión:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k(x)x = 0 \quad (2.59)$$

$$m \ddot{x} + c(x)\dot{x} + kx = 0$$

donde:  $k(x)$  ; representa la dependencia del coeficiente de rigidez del desplazamiento  $x$ .

$c(x)$  ; representa la dependencia del amortiguamiento del desplazamiento del sistema

Estas dos ecuaciones pueden ser ejemplificadas por las siguientes expresiones:

a) Para la constante de rigidez  $m \ddot{x} + \sin\left(\frac{x}{2}\right)x = 0$

b) para la constante de amortiguamiento  $\ddot{x} - \mu x(1 - x^2) + x = 0$  (ecuación de Van der Pol's)

La figura 2.16 corresponde a la señal en el tiempo de un sistema en el cual el comportamiento no lineal se debe a las características no lineales de la constante de rigidez.

## 2.4 Vibraciones Forzadas

Las señales determinísticas periódicas estudiadas anteriormente, son un caso hipotético de comportamiento de un sistema mecánico, porque ningún sistema real puede mantener el movimiento por sí sólo una vez que cesa la excitación.

Los sistemas mecánicos para trabajar normalmente precisan de la acción de un agente externo. Si los sistemas están perfectamente alineados y balanceados no surgirán fuerzas excitadoras y por lo tanto no habrá vibración. Pero estas condiciones son muy difíciles de lograr por lo que se establecen criterios de control de esos parámetros que dan como resultado que el sistema funcione bajo los efectos de las vibraciones forzadas.

Cuando el sistema está sometido a vibraciones forzadas su respuesta será a la frecuencia que le fue impuesta por la fuerza excitadora. Luego, es imprescindible conocer la relación que guarda esta frecuencia con la frecuencia natural del sistema y cuál es su comportamiento en esos casos.

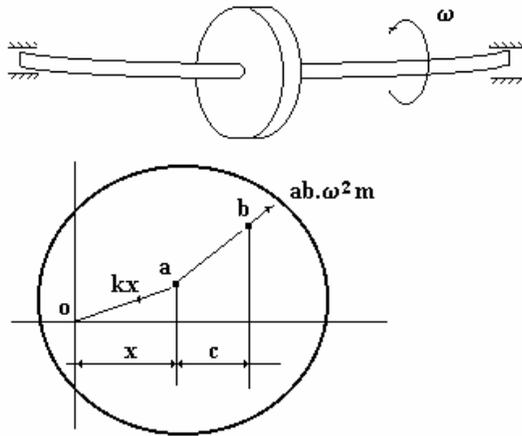
Para obtener las características fundamentales de los sistemas con oscilaciones forzadas, inicialmente se considerará un sistema forzado sin amortiguamiento de donde serán extraídas las conclusiones más generales que servirán de base al análisis de sistemas más complejos.

#### **2.4.1 Vibraciones Forzadas no amortiguadas**

Las fuerzas excitadoras pueden ser de diversas naturaleza influyendo esta característica en el comportamiento del sistema sobre el cual actúa. Por ejemplo, las máquinas rotatorias como las turbinas, bombas hidráulicas, etc., están sometidas a una frecuencia de rotación de acuerdo a su diseño. Si existe cierto desplazamiento del centro de masa respecto al centro de giro, sobre el rotor surgirá una fuerza excitadora que será proporcional a la frecuencia de rotación.

En la figura 2.16 se muestra una rueda unida a un rotor con una frecuencia de rotación igual a  $\omega$ . En la misma, el centro de masa (b) y el centro geométrico (a) se encuentran desplazados del centro de giro (o) entre otras causas por curvatura del eje.. Esta situación provocará que en el centro de masa surja una fuerza  $F_e$  que tratará de sacar al sistema de su posición de equilibrio, por lo que surgirá otra fuerza, en sentido contrario aplicada sobre el centro geométrico, que tratará de retornarlo a su posición inicial.

Las condiciones a la que esta sometido ese sistema puede ser llevado al modelo simplificado de masa resorte con un grado de libertad, figura (2.2) al que se le añade la acción de la fuerza excitadora  $F_e$ . Este modelo, el cual prescinde del amortiguamiento, permitirá determinar las propiedades fundamentales de los sistemas mecánicos con vibraciones forzadas.



**Fig. 2.16. Sistema con vibración forzada**

Aplicando la segunda ley de Newton, de la figura 2.16 se tendrá lo siguiente:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + ab \cdot \cos \omega \cdot t) = -kx$$

$$m \ddot{x} - ab\omega^2 \cos(\omega \cdot t) = -kx$$

de donde dividiendo por la masa del sistema se tendrá:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{ab \cdot \omega^2}{m} \cos \omega \cdot t$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega \cdot t \quad (2.61)$$

Como se aprecia de la ecuación (2.61) ahora están presentes dos frecuencias, la propia del sistema y la impuesta por la fuerza excitadora. Luego, de la relación que guarden estas frecuencias entre sí dependerá el comportamiento del sistema bajo la acción de la fuerza excitadora  $F_0 \cos \omega.t$ .

En otras palabras el movimiento resultante dependerá de la relación entre la frecuencia natural  $\omega_0$  y de la frecuencia  $\omega$  de la fuerza excitadora.

A partir de la ecuación (2.61) serán analizados tres casos.

a) Si se cumple que  $\omega \ll \omega_0$ , la fuerza de inercia será mucho más pequeña que la fuerza elástica y el sistema se mueve en fase con la fuerza impulsora con una amplitud que dependerá de la rigidez del mismo.

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} \cos \omega.t$$

b) Si se cumple que  $\omega \gg \omega_0$  entonces la fuerza de inercia es mayor que la fuerza elástica del sistema por lo que este se moverá con una gran aceleración y en fase opuesta a la fuerza impulsora.

$$x(t) = -F_0 \omega^2 \cos \omega.t$$

c) Si se cumple que  $\omega_0 = \omega$  las amplitudes de oscilación se hacen muy grandes, denominándose este fenómeno **resonancia**. Para demostrar este planteamiento se determinará la amplitud del sistema. Si se considera que la solución de la ecuación diferencial de segundo orden (2.61) es igual a:

$$x(t) = A_1 \cos \omega.t$$

entonces, derivando y sustituyendo en la ecuación (2.61) se tiene lo siguiente:

$$(-m\omega^2 A_1 + kA_1) \cos \omega.t = F_0 \cos \omega.t \quad (2.62)$$

simplificando y despejando la amplitud  $A_1$  se obtiene el siguiente resultado:

$$A_1 = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

de donde finalmente la amplitud del sistema con vibraciones forzadas no amortiguadas será igual a:

$$A_1 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \rightarrow A_1 = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (2.63)$$

Aplicando el límite a la ecuación (2.54) se observa que la amplitud de la oscilación tiende al infinito cuando se cumple que:

a) para  $\omega < \omega_0$   $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} A_1 = \infty$  (2.64)

b) para  $\omega > \omega_0$   $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} A_1 = -\infty$  (2.65)

Analizando este comportamiento se puede concluir que el fenómeno de la resonancia está presente bajo las condiciones planteadas en las ecuaciones (2.64 y 2.65) y que coincide con el planteamiento hecho en el inciso (c). Sin embargo, para que este resultado responda al comportamiento de los sistemas reales, es necesario introducir el ángulo de fase  $\alpha$  para que la amplitud sea siempre positiva, o sea  $A = |A_1|$ . De esta forma la respuesta del sistema será igual a:

$$x(t) = A \cos(\omega.t + \alpha) \quad (2.66)$$

Así para el caso en que se cumpla que  $\Omega < \Omega_0$  el sistema y la fuerza excitadora estarán en fase y  $\alpha = 0$ . Para el caso en que  $\Omega > \Omega_0$  el sistema y la fuerza excitadora estarán desfasados  $180^\circ$  y  $\alpha = \pi$ .

En los sistemas físicos reales no tiene sentido el valor infinito de la amplitud, ya que no es posible la ausencia del amortiguamiento, pero conocido el comportamiento de este sistema ideal es posible inferir como se comportará un sistema con amortiguamiento bajo la acción de una fuerza excitadora.

### 2.4.2 Vibraciones forzadas amortiguadas

Para el estudio de estos sistemas será tomado como modelo el sistema masa resorte con amortiguamiento mostrado en la figura (2.9) al que se le aplicará una fuerza externa excitadora. De esta forma la ecuación que caracteriza el comportamiento dinámico del sistema estará dada por una ecuación diferencial de segundo grado no homogénea como sigue:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = F_0 \cos \omega.t \quad (2.67)$$

de donde se tiene que:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega.t \quad (2.68)$$

donde  $\gamma = \frac{c}{m}$ ; es el coeficiente de amortiguamiento del sistema con vibraciones forzadas.

De la ecuación (2.68) se aprecia que el movimiento del sistema es el resultado de dos oscilaciones superpuestas:

- uno transitorio, la oscilación libre amortiguada (solución de la ecuación homogénea 2.36).

###- otro estable, la excitación continua (solución no homogénea)

$$x(t) = [\textit{transitorio} + \textit{estable}]$$

El efecto del amortiguamiento provoca que la oscilación propia del sistema se anule después de cierto período de tiempo quedando sólo la acción de la fuerza excitadora estable. El término transitorio tendrá un comportamiento caracterizado por la relación entre las fuerzas elásticas y las fuerzas amortiguadoras del sistema, como ya es conocido.

De esta forma la ecuación (2.68) será resuelta considerando las dos partes que la integran. La parte homogénea quedará igual a la ecuación característica de los sistemas con oscilaciones libres amortiguadas y la solución particular de la no-homogénea establecerá el término periódico.

La solución de la ecuación no homogénea puede obtenerse suponiendo que la respuesta del sistema y la fuerza excitadora tienen las siguientes expresiones.

$$x = X e^{i\omega t} \quad \text{y} \quad F = F_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en la ecuación (2.68) se obtiene el siguiente resultado:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k) X e^{i\omega t} = F_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (2.69)$$

despejando la amplitud de la ecuación (2.69) se tendrá que:

$$X = \frac{\frac{F_{(0)}}{m} e^{-i(\varphi)}}{\left( (\omega_0^2 - \omega^2) + i(\omega \gamma) \right)} \quad ; \quad (2.70)$$

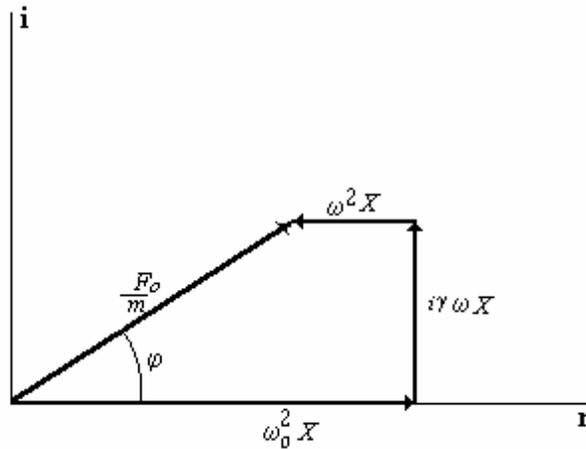
donde  $\varphi$  representa el ángulo de fase entre la respuesta del sistema y la fuerza excitadora, e igual a:

$$\varphi_{(\omega)} = \tan^{-1} \frac{2\xi\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (2.71)$$

Así la solución de la parte no homogénea de la ecuación diferencial quedará expresada mediante la siguiente ecuación:

$$x_{(\omega)} = \frac{1/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cdot F_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (2.72)$$

La ecuación (2.70) representada en un diagrama fasorial, como lo muestra la figura (2.17), permite entender con mayor facilidad el resultado obtenido.



**Fig. 2.17. Representación en forma compleja del movimiento armónico forzado**

Si se divide la respuesta del sistema respecto al término que representa a la fuerza excitadora, la expresión que se obtiene corresponderá a la de la función respuesta del sistema en donde la fuerza excitadora es considerada unitaria. En este caso la amplitud toma características de factor de ganancia o de magnificación.

$$H_{(\omega)} = \frac{x_{(\omega)}}{F_{(\omega)}} \quad ;$$

$$H_{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left( \gamma \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)}} \quad (2.73)$$

Luego la solución de la ecuación del movimiento para los sistemas amortiguados con vibración forzada, dada por la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea (2.68), será igual a:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}\left(\sqrt{(1 - \xi^2)} \cdot \omega_0 t + \phi\right) + \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e^{(i\omega \cdot t - \varphi)} \quad (2.74)$$

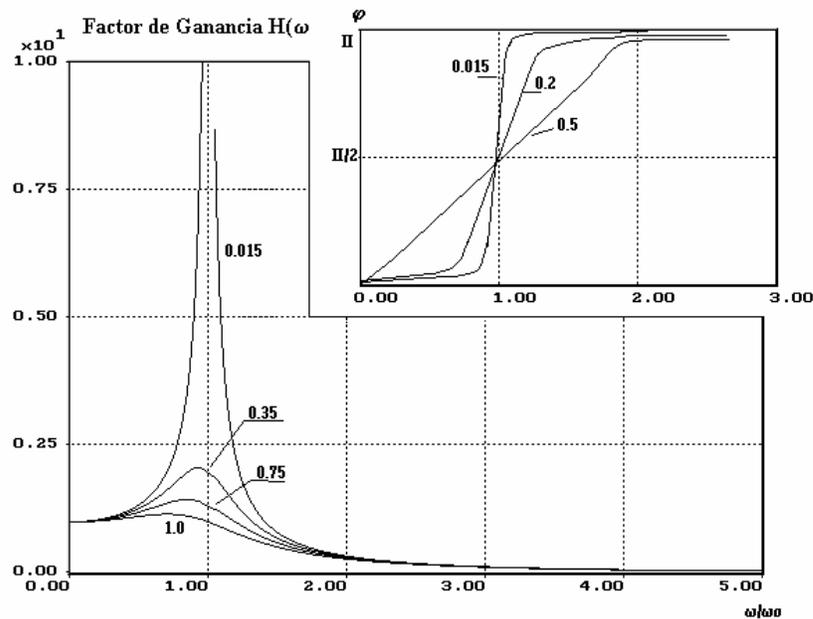
Como ya fue planteado anteriormente, el comportamiento transitorio tiene un tiempo de duración muy corto, por lo que el sistema se comporta de forma estable ante la excitación provocada por la fuerza  $F_0 \cos \omega \cdot t$ . Por esta razón, tomando como base la ecuación (2.73) se puede conocer la dependencia de la amplitud respecto a la relación de las frecuencias y el amortiguamiento en los sistemas con vibración forzada y amortiguamiento.

En la tabla I son mostradas las relaciones entre la frecuencia, la razón de amortiguamiento y la amplitud del sistema

**Tabla I**  
**Valores de amplitud y fase para diferentes relaciones  $\omega/\omega_0$  y  $\xi$**

$\xi$	$H(\omega)$ para $\omega/\omega_o = 0$	$H(\omega)$ para $\omega/\omega_o < 1$	$H(\omega)$ para $\omega/\omega_o = 1$	$H(\omega)$ para $\omega/\omega_o > 1$
<b>= 1</b>	$F_0/k$	$\rightarrow F_0/k$	$0.5(F_0/k)$	$\lll F_0/k$
<b>&lt; 1</b>	$F_0/k$	$\rightarrow F_0/k$	$\rightarrow \infty$	$\lll F_0/k$
<b>&gt; 1</b>	$F_0/k$	$\rightarrow F_0/k$	$\ll F_0/k$	$\lll F_0/k$

La figura (2.18) muestra la relación anterior, además presenta la relación que guarda el ángulo de fase  $\phi$  con la frecuencia y el factor de amortiguamiento  $\xi$ .

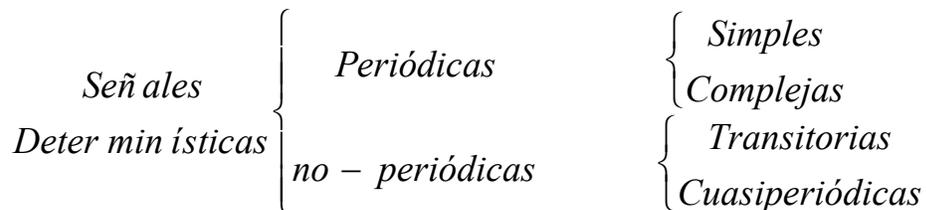


**Fig. 2.18** Variación de la amplitud y el ángulo de fase respecto a  $\xi$  y  $\omega/\omega_o$

Del análisis de la tabla I y de la figura (2.18) se aprecia que no todos los sistemas caen en resonancia cuando se igualan la frecuencia natural del sistema y la frecuencia del agente

excitador. Sólo habrá resonancia cuando las fuerzas elásticas superen a las fuerzas disipativas, o sea el sistema es subamortiguado.

Resumiendo, las señales determinísticas pueden tener como fuentes diversos sistemas físicos, sólo es necesario que se cumplan las condiciones de linealidad en los mismos para que puedan ser descritos por las expresiones matemáticas obtenidas.



**Tipo de señal**

**Sistema físico**

**SIMPLES**

**movimiento armónico simple**

Las oscilaciones tienen lugar a

la frecuencia natural del sistema :

Péndulo físico

**vibraciones forzadas estables**

Las vibraciones tienen lugar a la

frecuencia de la fuerza excitadora :

Máquina rotatoria ideal

**COMPLEJAS**

**Combinación de dos o más oscilaciones**

Las oscilaciones pueden tener la misma frecuencia

Máquina rotatoria con la combinación de varias armónicas  
(desbalance y desalineamiento)

**Las oscilaciones pueden tener direcciones perpendiculares entre sí:**

Figuras de Lissajous

### **CUASIPERIODICAS**

**Combinación de oscilaciones cuyas frecuencias no guardan relación alguna entre sí:**

Motor asincrónico

### **TRANSITORIAS**

**Debido a la acción de fuerzas impulsivas sobre:**

Sistema estático

Golpe sobre estructuras no rotatorias

Sistema dinámico

Golpe sobre estructuras rotatorias

## **2.5.- SEÑALES ALEATORIAS**

Los sistemas descritos en el epígrafe anterior pueden presentarse bajo condiciones muy específicas de interacción con medio excitador, así como bajo determinadas características estructurales de los mismos.

En la gran mayoría de los sistemas reales las señales están acompañadas de la influencia de efectos aleatorios relacionados con las características del medio que rodea al sistema.

Este grupo de señales corresponde a las señales **no determinísticas o aleatorias**. Dentro de esta clasificación pueden ser incluidas todos los tipos de señales emitidas por los sistemas mecánicos, sólo que para que puedan ser analizadas con los descriptores que serán estudiados a continuación deben de cumplir con las condiciones de linealidad.

Las señales aleatorias no pueden ser descritas por una expresión matemática explícita, sino que deben ser estudiadas a partir de los criterios estadísticos por el elevado número de formas de representación que pueden tener. Esto no es más que reflejo de las posibles formas de ocurrencia de un fenómeno en un sistema real.

Esa colección de posibles formas de ocurrencia del fenómeno, denominadas funciones muestras, es lo que hace que el sistema se comporte de forma aleatoria o estocástica ante una excitación dada. En dependencia de como sea la respuesta del sistema aleatorio ante una excitación estos pueden emitir señales aleatorias estacionarias y no estacionarias.

Cuando los procesos aleatorios son estacionarios, es posible describir su comportamiento promediando sus propiedades más importantes a partir de un conjunto de funciones muestras.

En la práctica esta clasificación es llevada a una sola función muestra del proceso aleatorio. En este caso la función elemental será estacionaria si las propiedades que se calculan en un intervalo de tiempo dado no varían notablemente respecto a otro intervalo de tiempo próximo.

Además de estacionarios los procesos aleatorios pueden clasificarse en ergódicos y no ergódicos. Son ergódicos aquellos en los que se mantienen invariables las propiedades del proceso aleatorio en las diferentes funciones muestrales, de lo contrario son denominados no ergódicos.

Esta clasificación reviste una gran importancia práctica, ya que permite calcular las propiedades de un fenómeno mediante el estudio de una sola muestra, en caso contrario sería necesario el análisis continuado de las señales emitidas por el sistema durante la acción de las fuerzas excitadoras, para su posterior estudio.

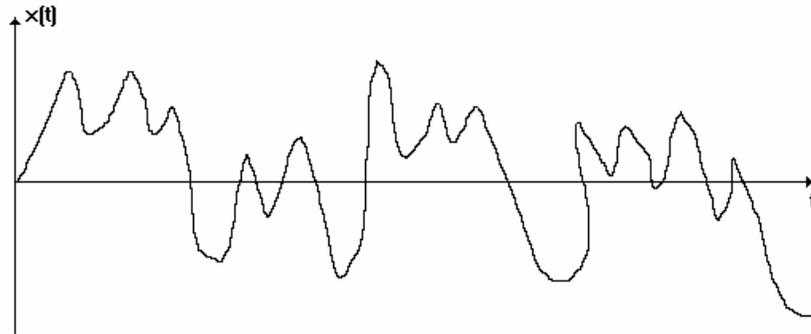
Para describir e interpretar las propiedades fundamentales de las señales aleatorias estacionarias y ergódicas son usadas cuatro funciones estadísticas importantes:

- Valor medio cuadrático
- Función de densidad de probabilidad
- Función de autocorrelación
- Función de densidad de potencia espectral

Se presume que el proceso en estudio es ergódico pues esto se hace a través de promedios en el tiempo

### **2.5.1 Valor Medio Cuadrático**

El valor medio cuadrático da la medida de la energía con que es emitida la señal y puede ser determinado promediando los valores cuadráticos de cada punto de la muestra en un intervalo de tiempo definido.



**Fig. 2.17 Muestra de un proceso aleatorio**

Para la muestra de la figura 2.17, el valor medio cuadrático se puede determinar mediante la siguiente ecuación:

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (2.60)$$

Si una función muestra  $x(t)$  tiene la característica de que sus valores tiene una fuerte tendencia a tomar uno de ellos para todo el intervalo de tiempo T seleccionado, entonces reviste una gran importancia caracterizar a la misma mediante su valor medio.

El valor medio o componente estática de la señal aleatoria puede ser expresado mediante el valor medio estadístico como:

$$\mu_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.61)$$

Para caracterizar la amplitud de la distribución de los valores instantáneos de la señal aleatoria descrita por la función  $x(t)$  alrededor de su valor medio, se define otro término estadístico, la varianza.

$$Var = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x)^2 dt \quad (2.62)$$

O sea, la varianza es igual al cuadrado de la desviación estándar  $\sigma_x$ , la cual representa la medida de la distribución de los valores instantáneos alrededor del valor medio.

$$\sigma_x = \sqrt{Var}$$

Resolviendo la ecuación (2.62) se puede obtener la relación exacta entre la varianza, el valor medio cuadrático (componente dinámica de la señal) y el valor medio (la componente estática de la señal.), que toma la forma dada por la ecuación (2.63)

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \mu_x^2 \quad (2.63)$$

Si la componente estática de la señal es igual a cero, entonces la desviación estándar  $\sigma_x$ , será igual a:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \\ \sigma_x &= \sqrt{\overline{x^2}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

o sea, la desviación estándar será sólo función de los valores cuadráticos de la señal recibiendo el nombre de Raíz Media Cuadrática o valor **RMS**.

El valor RMS es una medida muy utilizada para determinar el comportamiento dinámico de un sistema. Si por ejemplo una señal aleatoria es descrita por la función

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \varphi_i) \quad (2.65)$$

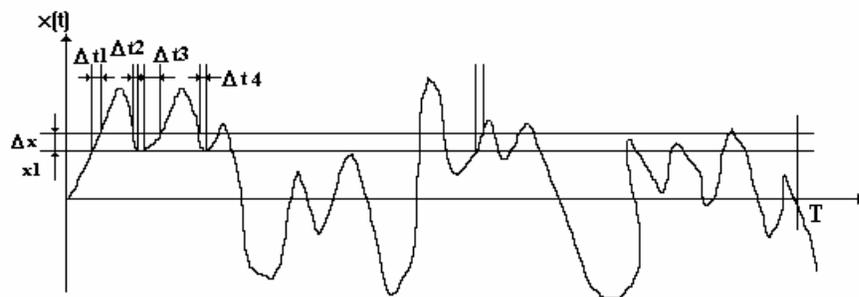
donde  $\varphi_i$  es el parámetro aleatorio, entonces el valor RMS será igual a:

$$\begin{aligned} RMS &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (A \text{sen}(\omega_0 t + \varphi_i))^2 dt} \\ RMS &= \sqrt{\frac{A^2}{2}} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Como se aprecia de este resultado, el valor RMS es mayor que el valor medio de la función y no depende de su ángulo de fase. Así, para un intervalo de tiempo de medición T el valor RMS reflejará la energía que es liberada por la oscilación como función de su amplitud.

### 2.5.2 Función de densidad de Probabilidad

La función de densidad de probabilidad brinda información relacionada con las propiedades de la señal en el dominio de las amplitudes. Esto significa que mediante ella se describe la probabilidad de que la función  $x(t)$  tenga un determinado valor dentro de un intervalo de tiempo definido T (tiempo de muestreo).



### Fig. 2.18 Determinación de la probabilidad en una muestra aleatoria

La figura 2.18 muestra la determinación de la probabilidad para la función  $x(t)$  de una señal aleatoria.

La probabilidad así definida recibe el nombre de probabilidad acumulativa y lleva implícito el conjunto de probabilidades de que la función  $x(t)$  tome un valor en el rango  $x+\Delta x$  para el intervalo de tiempo seleccionado y puede expresarse como:

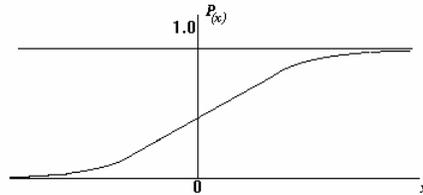
$$P_{(x)}[x < x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \quad (2.67)$$

donde :

$T_x = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$  ; es el tiempo en que la función  $x(t)$  se mantiene en el rango  $x, x+\Delta x$  para un tiempo de muestreo igual a T

Analizando la ecuación (2.67) se aprecia que cuando el límite inferior del intervalo  $x, x + \Delta x$  tiene un valor negativo extremadamente pequeño, o sea, para  $x \rightarrow -\infty$  los valores de la función  $x(t)$  estarán fuera de ese intervalo y por lo tanto  $\sum T_{(x)} = 0$ . En la medida en que  $x$  aumente su valor desde  $-\infty$  habrá valores de  $x(t)$  que podrán encontrarse dentro de ese intervalo y  $\sum \frac{T_x}{T}$  comenzará a incrementarse. Cuando  $x \rightarrow \infty$  la función  $x(t)$  tendrá a todos sus puntos dentro de ese rango, porque sus valores serán siempre menores a  $\infty$  y la relación  $\sum \frac{T_x}{T}$  será entonces igual a la unidad, ver la figura 3.3:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\infty & P_{(x)} &= 0 \\
 x_2 &= \infty & P_{(x)} &= 1 \\
 x_1 &< x < x_2 & 0 < P_{(x)} < 1
 \end{aligned}$$



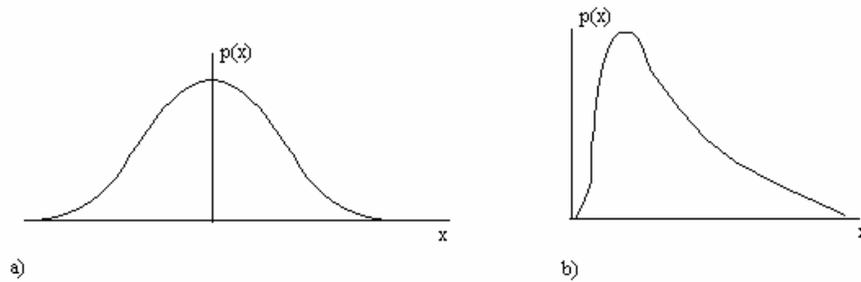
**Fig. 2.19 Probabilidad acumulativa**

Con la probabilidad acumulativa se puede definir la función de densidad de probabilidad, igual a:

$$P_{(x+dx)} - P_{(x)} = p_{(x)} dx \quad (2.68)$$

La función de densidad de probabilidad permite evaluar la posibilidad de que  $x(t)$  tome un determinado valor en el intervalo  $x, x + \Delta x$ . La misma puede ser graficada obteniéndose una curva continua que puede tomar diversas formas.

Unas de las formas más conocidas son las mostradas en la figura 2.20 que corresponden a la distribución de probabilidad de Gauss y Rayleigh.



**Fig. 2.20 Curvas de probabilidad. a) Gauss b) Rayleigh**

La función de densidad de probabilidad puede expresarse mediante la distribución de Gauss, que en forma normalizada es igual a:

$$p_{(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (2.69)$$

Cuando las señales aleatorias tienen sus valores medios desplazados hacia la rama positiva su distribución se comporta según la distribución de Rayleigh, la que se expresa mediante la ecuación:

$$p_{(x)} = \frac{x^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} \quad \text{para } x > 0 \quad (2.70)$$

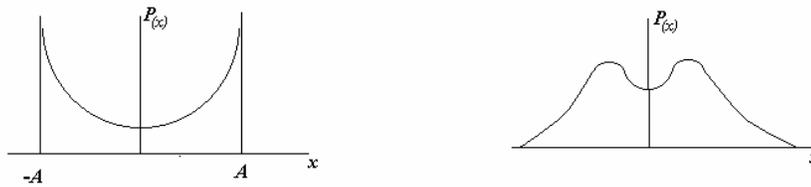
Cada función aleatoria tendrá una curva de probabilidad que la caracterizará. Por ejemplo, si se analiza una señal aleatoria como la descrita en la ecuación (2.65), la probabilidad acumulativa de la misma será igual a:

$$P_{(x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{A}$$

de donde se puede obtener el valor de la función de densidad de probabilidad como:

$$p_{(x)} = \begin{cases} \left[ \pi \sqrt{A^2 - x^2} \right]^{-1} & |x| < A \\ 0 & |x| > A \end{cases} \quad (2.71)$$

y su representación será una parábola invertida mostrada en la figura 2.21 (a) junto a otro grupo de señales aleatorias típicas.



**Fig. 2.21 Función de densidad de probabilidad**  
**a) seno b) ruido de banda estrecha**

Los valores medio cuadráticos y los valores medios de las señales aleatorias pueden ser expresados mediante la función de densidad de probabilidad como sigue:

a) valor medio

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{(x)} dx$$

b) valor medio cuadrático

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{(x)} dx$$

### 2.5.3 Función de Autocorrelación

Mediante la función de autocorrelación se determina la dependencia general de los valores de la señal en un tiempo respecto a otro. Esto significa que la función de autocorrelación permite determinar la dependencia estadística de los valores instantáneos de la señal  $x(t)$  del proceso aleatorio para diferentes momentos de tiempo. Luego la autocorrelación de  $x(t)$  para los tiempos  $t$  y  $t+\tau$ , será igual a:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (2.72)$$

Un proceso físico puede representarse en el dominio del tiempo  $x(t)$  o en el dominio de la frecuencia  $X_{(\omega)}$  por lo que ambas funciones son dos formas de representar al mismo fenómeno. Esto implica que tiene que existir una relación directa entre ambas representaciones, lo cual se logra mediante la transformada de Fourier de la función en el tiempo.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(i\omega)} e^{ni\omega.t} d\omega \quad (2.73)$$

o su inversa:

$$X_{(i\omega)} = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.74)$$

que caracteriza la amplitud de la señal en el dominio de la frecuencia, o sea, representa densidad espectral de la función  $x(t)$ . De la ecuación (2.73) se puede obtener la representación de la función  $x(t + \tau)$  en forma compleja.

$$x(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(i\omega)} e^{i\omega(t+\tau)} d\omega \quad (2.75)$$

sustituyendo la ecuación (2.75) en la ecuación (2.72) se tiene lo siguiente:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_{(i\omega)} e^{i\omega t} e^{i\omega \tau} d\omega dt \quad (2.76)$$

y reagrupando:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt \right) X_{(i\omega)} e^{i\omega \tau} d\omega$$

de donde la función de autocorrelación será igual a:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left( X_{(-i\omega)} \right) X_{(i\omega)} e^{i\omega \tau} d\omega \quad (2.77)$$

Si  $\tau$  es igual a cero la función de autocorrelación dada por la ecuación (2.77) tomará la forma de los valores medios cuadráticos de la función  $x(t)$  en su forma compleja.

$$\overline{x^2} = \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} X_{(i\omega)} X_{(-i\omega)} d\omega \quad (2.78)$$

$$\overline{x^2} = \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} |X_{(i\omega)}|^2 d\omega$$

de donde se tendrá que:

$$R_x(0) = \overline{x^2} \quad (2.79)$$

La función de autocorrelación tomará para estas condiciones el valor máximo.

Por ejemplo, si se tiene una función del tipo:

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \Theta_i)$$

donde la variable  $\Theta$  representa el término aleatorio, la función de autocorrelación expresada mediante la función de densidad de probabilidad será igual a:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{(x)} dx = \int_0^{2\pi} x_{1(\Theta)} x_{2(\Theta)} p_{(\Theta)} d\Theta$$

donde

$$x_{1(\Theta)} = x(t) \quad x_{2(\Theta)} = x(t + \tau)$$

evaluando la función de probabilidad para  $0 < \Theta < 2\pi$

se tendrá que  $p_{(\Theta)} = \frac{1}{2\pi}$

de donde finalmente la función de autocorrelación tomará el valor dado por:

$$R_x(\tau) = \int_0^{2\pi} \text{sen}(\omega_0 t + \Theta_i) \text{sen}[\omega_0(t + \tau) + \Theta_i] d\Theta$$

que al resolverse será igual a:

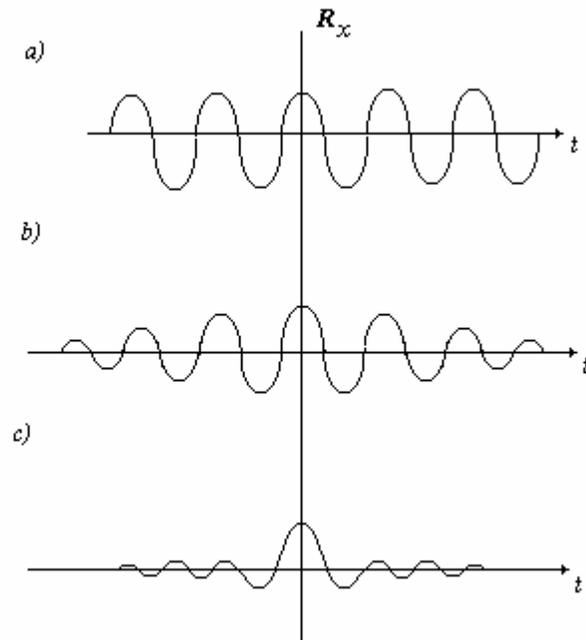
$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

y para  $\tau$  igual a cero  $R_x(0) = \frac{A^2}{2}$

Como se aprecia la función de autocorrelación toma el máximo valor cuando  $\tau$  se iguala a cero y es igual a la varianza cuando el valor medio  $\mu(t)$  es igual a cero, por lo que a partir de ella puede ser evaluada también la función RMS de la señal aleatoria  $x(t)$ .

$$RMS = \sqrt{R_x(0)} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A \quad (2.80)$$

En la figura (3.6) se muestran los gráficos más comunes de la función de autocorrelación de donde puede apreciarse cual es la tendencia de dichas curvas.



**Fig. 2.22 Función de autocorrelación de funciones conocidas**

**a) Función seno      b) Ruido aleatorio banda estrecha**

**c) Ruido aleatorio banda ancha.**

Para una señal tipo sinusoidal la función de autocorrelación es un coseno de igual período. En la medida en que la señal tiene un mayor número de componentes la función de autocorrelación va disminuyendo sus valores a partir de  $\tau$  igual a cero. Para una señal aleatoria con un número elevado de componentes la función de autocorrelación muestra un sólo pico ubicado en  $\tau$  igual a cero lo que significa que estas señales sólo se correlacionan en ese momento. Este comportamiento permite conocer algunas de las propiedades que cumple la función de autocorrelación.

a) es simétrica respecto al eje  $\tau$  igual a cero.

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

b) alcanza los valores máximos en  $\tau$  igual a cero.

$$R_x(0) \geq R_x(\tau)$$

#### 2.5.4. Función de densidad de potencia espectral

Cuando una señal está formada por un múltiples componentes, la suma de los valores medios cuadráticos de cada uno de ellos permitirá determinar el valor medio cuadrático de la señal, o sea, su espectro discreto.

Generalmente, en el análisis de señales resulta de gran interés el valor medio cuadrático en un rango de frecuencias  $\Delta\omega$ .

Si la suma de los valores medios cuadráticos de una función  $x(t)$  en un intervalo de frecuencias  $\Delta\omega$ , es dividida por ese valor se obtiene la **función de densidad de potencia espectral**.

Tomando de partida la ecuación (2.78) se puede obtener la expresión que evalúa la función de densidad de potencia espectral  $S_{(\omega)}$ .

$$S_{(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} |X_{(i\omega)}|^2 \quad (2.81)$$

de donde puede ser establecida la relación con los valores medios cuadráticos y la función de autocorrelación de la señal.

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{(i\omega)} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.82)$$

y cuando  $\tau$  se iguala a cero entonces:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{(i\omega)} d\omega \quad (2.83)$$

Los sumandos debajo de la integral representan las energías de las componentes espectrales de la señal aleatoria en el intervalo de integración definido por el rango de frecuencias  $\Delta\omega$  en el cual se quiere estudiar a la señal.

$$S_{(\omega)} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\overline{x^2}}{\Delta\omega} \quad (2.84)$$

Si se emplea la expresión compleja de  $x$  dada por la ecuación para determinar el valor medio cuadrático de la función  $x(t)$ , se tiene lo siguiente:

$$\sum_n \overline{x_n^2} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{|F_0|^2}{k^2} |H_{(n,\omega)}|^2 \quad (2.85)$$

que al ser dividido por el intervalo de frecuencia será igual a:

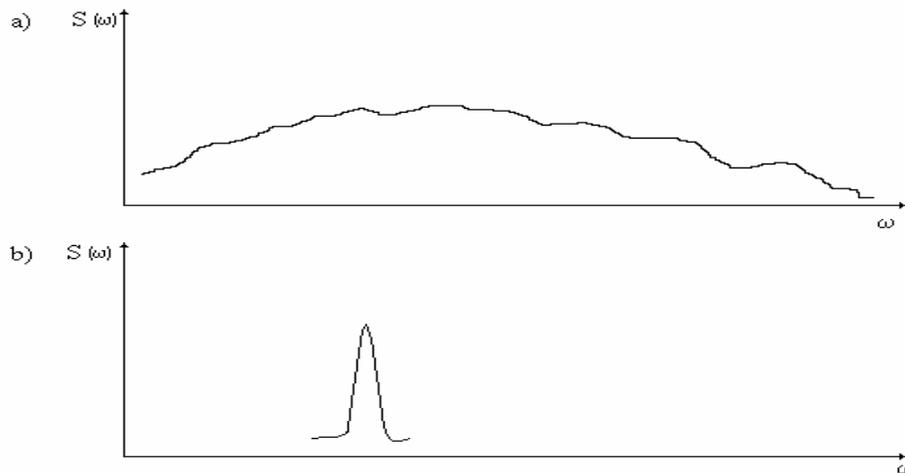
$$\begin{aligned} \sum_n S_{x(n,\omega)} &= \sum_n \frac{|F_0|^2}{k^2 \Delta\omega} |H_{(n,\omega)}|^2 \\ \sum_n S_{x(n,\omega)} &= \sum_n S_{F(n,\omega)} |H_{(n,\omega)}|^2 \end{aligned} \quad (2.86)$$

la cual representa la función de densidad de potencia espectral discreta de la señal a partir de las componentes espectrales de la fuerza excitadora..

$$S_{(\omega)} = \sum_n S_{x(n\omega)} \quad (2.87)$$

Una característica muy importante de la función de densidad de potencia espectral es que tiene la propiedad de permanecer constante para el intervalo de frecuencias establecido, sólo varía si ha ocurrido alguna alteración en una de las componentes de la señal.

La función de densidad de potencia espectral puede ser graficada para diferentes tipos de señales aleatorias.



**Fig. 2.23 Gráficos de la función de densidad de potencia espectral**  
**a) continuo    b) discreto**

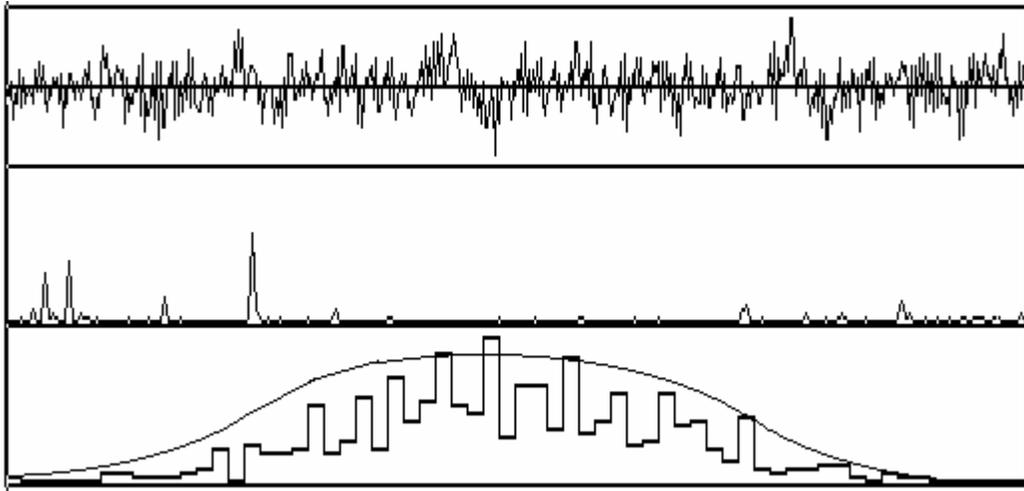
Analizando el caso más simple, donde la señal puede ser descrita por una función del tipo coseno se obtiene la representación discreta de la función de densidad de potencia espectral e igual a:

$$S_{(i\omega)} = \frac{|X_{(i\omega)}|^2}{2} \delta(f - f_0) \quad (2.88)$$

o sea, la función de densidad de potencia espectral para una función seno puede representarse por una función Delta de Dirac cuya amplitud está dada por el cuadrado del coeficiente de Fourier de la función, figura 2.23 (a).

Si la señal tiene más de una componente, el resultado estará dado por la sumatoria de cada una de las funciones de densidad de potencia espectral correspondiente a cada componente, ecuación (2.87), lo que dará lugar al espectro discreto de la señal. Si el número de componentes presentes en la señal es muy grande, la gráfica de la función de densidad de potencia espectral tomará una forma continua como se muestra en la figura 2.23 (b). A continuación se muestran los gráficos de la señal en el tiempo, la densidad de potencia espectral y la densidad de probabilidad de dos señales.

a)



b)

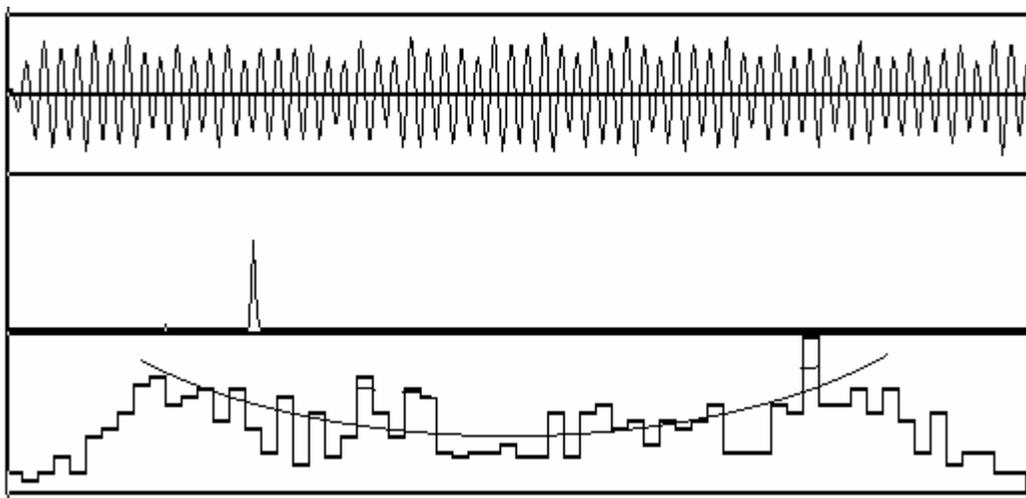


Fig. 2.24 Gráficos de la señal en el tiempo, a) muestra aleatoria b) función periódica

**Sistemas de  
Adquisición  
de la  
Información  
3**

---

### 3.1 Instrumentos primarios.

El instrumento más conveniente para medir la vibración es aquel que convierte la energía del movimiento en electricidad.

Los convertidores son elementos sensibles que transforman los cambios de la cantidad de una magnitud mecánica en variaciones de otra propiedad física, que suele ser, frecuentemente, una señal eléctrica proporcional al parámetro del movimiento mecánico desarrollado. Si el elemento sensible se instala en una estructura más compleja que le permita efectuar físicamente la transformación, entonces se convierte en un instrumento de medición primario.

Los instrumentos primarios para medir vibraciones pueden ser clasificados en dos grandes grupos:

- los convertidores activos (de generación propia), que transforman la energía mecánica de entrada en energía eléctrica de salida;
- los convertidores pasivos, a los que se les suministra energía eléctrica para que los cambios de energía, que le llega del sistema que mide, se transforme en variaciones de energía eléctrica útil de salida.

Cuando el convertidor transforma la energía mecánica de entrada, directamente, en energía eléctrica se denomina también: convertidor directo; cuando alguna otra magnitud física interviene en el proceso de conversión (por ejemplo: acústica, óptica, etc.), se denominan: convertidores indirectos.

Una clasificación parcial de los elementos sensibles, según el principio de funcionamiento, se muestra en la Fig. 3.1 .

No todos los elementos sensibles mencionados en la Fig. 3.1 son convenientes para la medición de vibraciones. Esto se debe, entre otros, a problemas como: no-linealidad, muy pequeña respuesta a la excitación mecánica. En la categoría de los pasivos, los más comunes son los que emplean los principios: resistivo, inductivo y capacitivo. En la categoría de elementos sensibles con generación propia, los más utilizados son de principio piezoeléctrico, electrodinámico y electromagnético.

Dentro de esta categoría, el piezoeléctrico es el más utilizado por las múltiples cualidades positivas del instrumento, como se verá más adelante.

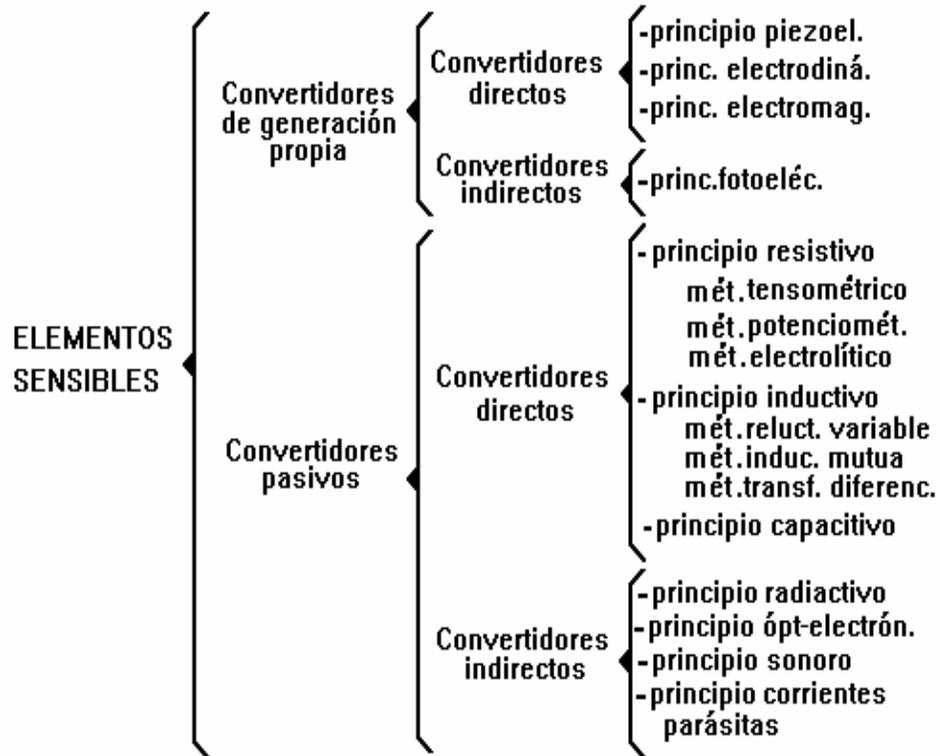


Fig. 3.1 Clasificación de los elementos sensibles, según el principio de funcionamiento.

### **3.1.1 El acelerómetro piezoeléctrico.**

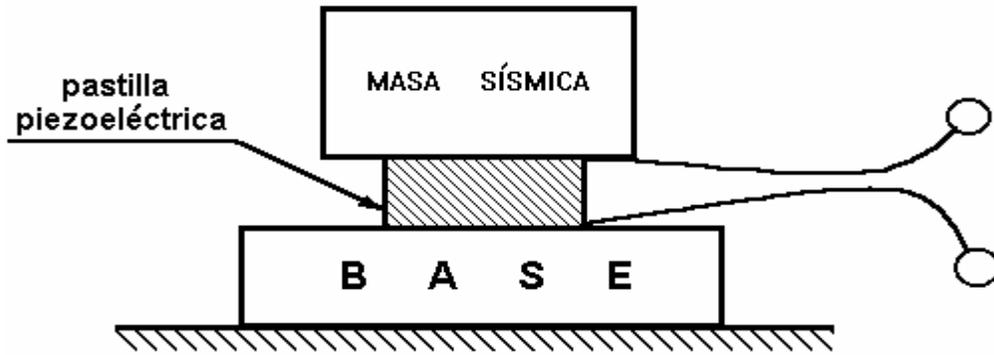
Montado el elemento sensible, que utiliza la conversión por generación propia y directa del principio piezoeléctrico en la estructura correspondiente, se convierte en el instrumento primario denominado ACELERÓMETRO, que goza de las ventajas generales siguientes: es ligero, robusto, posee amplia respuesta de frecuencia, tiene buena resistencia a relativamente altas temperaturas y costos de fabricación moderados.

Actualmente es el sensor más difundido a nivel mundial para la medición de las vibraciones mecánicas.

Su principio de funcionamiento se resume de la manera siguiente. Cuando un acelerómetro está sometido a vibraciones, la masa ejerce una fuerza variable en el elemento sensible. La carga electrostática generada por el elemento primario es proporcional a la aceleración que da lugar a la fuerza y, esta a su vez, al movimiento relativo de la masa, quien finalmente, es proporcional a la aceleración de la base en determinado intervalo de frecuencias.

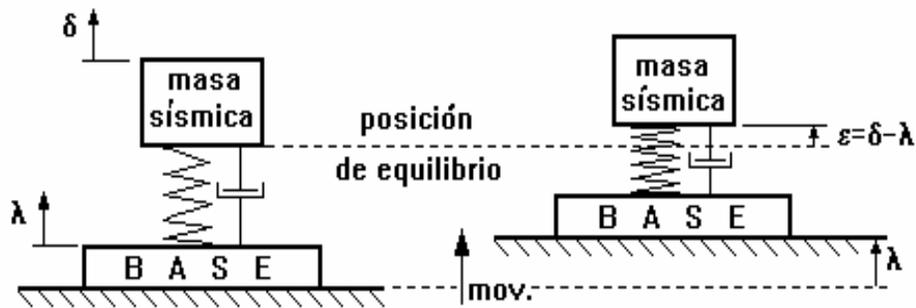
#### **3.1.1.1 Principio de operación.**

Un acelerómetro es un instrumento sísmico lineal que utiliza elementos piezoeléctricos de tal manera que se genera una carga electrostática proporcional a la aceleración aplicada al instrumento. Este sensor sísmico piezoeléctrico ideal se representa en la Fig. 3.2. Se entiende por instrumento sísmico a aquél, en el cual el movimiento vibratorio es medido de forma relativa, respecto a la masa de un sistema elástico fijo a la base oscilante.



**Fig. 3.2 Esquema de un acelerómetro ideal .**

La cerámica policristalina o el cristal piezoeléctrico, que produce la carga, actúa como un muelle. Cuando se le aplica una aceleración a la base esta hace variar las tensiones en la pastilla dando lugar a la deformación de esta última. El desplazamiento relativo entre masa sísmica y base se aprecia en la Fig. 3.3 . Aquí se ha agregado el amortiguamiento viscoso convencional de los sistemas elásticos. El movimiento acelerado aplicado a la base, hace que se desplace una magnitud  $\lambda$  provocando la deformación  $\varepsilon$  en el muelle (pastilla) . El desplazamiento relativo de la masa sísmica respecto a la base es función de la aceleración aplicada, la rigidez del muelle, la propia masa, y el coeficiente de amortiguamiento entre la base y la masa.



**Fig. 3.3 Desplazamiento relativo entre masa sísmica y base**

Como se demostrará posteriormente, cuando la frecuencia del movimiento de la base es mucho menor que la frecuencia de resonancia del instrumento de medición (masa-muelle), entonces el desplazamiento  $\varepsilon$  es directamente proporcional a la aceleración de la base y es independiente de la

frecuencia. Esta es una de las fundamentaciones principales para el uso del acelerómetro como medidor de vibraciones.

Si la constante dieléctrica del material piezoeléctrico no cambia con la carga, entonces definitivamente, el voltaje generado será proporcional a la aceleración.

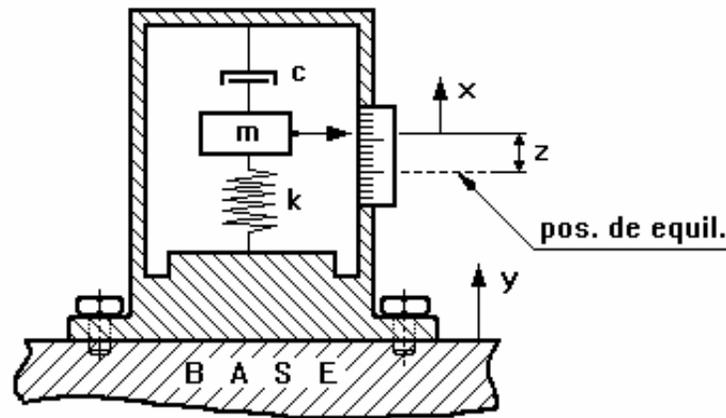
En el sistema sísmico ideal mostrado en las Fig. 3.2 y 3.3 , la masa tiene un coeficiente de rigidez infinito; el muelle (pastilla piezoeléctrica) no tiene masa; el amortiguamiento solo existe entre la masa sísmica y la base, siendo esta última, también, de rigidez infinita. En los acelerómetros reales no se cumplen estas consideraciones. Por ejemplo, la masa sísmica puede tener características (propiedades) próximas al elemento piezoeléctrico. En algunos sensores la masa sísmica y el muelle son una misma estructura como en el caso de los instrumentos de flexión. En los sensores de compresión externa donde el diseño es tal, que la estructura exterior se utiliza para soportar la masa sísmica y la pastilla piezoeléctrica, las distorsiones en la estructura pueden producir fuerzas mecánicas en el elemento sensible, generándose así, señales que no responden al movimiento mecánico aplicado a la base.

Todos estos factores cambian el comportamiento del sistema sísmico con respecto a aquellos calculados, utilizando las ecuaciones de los sistemas ideales. Muy particularmente, la frecuencia de resonancia de determinada combinación de elementos puede ser sustancialmente menor que la calculada teóricamente. A pesar de eso, las ecuaciones para un sistema ideal son útiles tanto en el diseño, como en las aplicaciones de los acelerómetros piezoeléctricos.

### **3.1.1.2 Ecuaciones básicas de operación.**

Existen básicamente tres tipos de instrumentos de medición, que son los que miden la aceleración, la velocidad y el desplazamiento. A continuación se tratará el primero, fundamentalmente. La mayoría de los instrumentos consisten en la estructura externa (o contenedor) y en el interior, el sistema masa-muelle-amortiguamiento, como se muestra en la Fig. 3.4 . La masa sísmica está limitada a moverse en una sola dirección. El desplazamiento relativo de la masa

respecto a la estructura externa es el que generalmente se mide con la instrumentación secundaria. El amortiguamiento se logra con un fluido viscoso en el interior



**Fig. 3.4 Esquema simplificado para la obtención de la ecuación diferencial del movimiento.**

del contenedor. Aunque este fluido no exista, un pequeño amortiguamiento siempre estará presente debido a la disipación de la energía en todo el sistema elástico. Esta forma de amortiguamiento se denomina estructural; y en ella interviene la fricción interna, atribuida al fenómeno de histéresis de los esfuerzos cíclicos en los materiales elásticos.

El desplazamiento de arrastre del contenedor (que es el mismo de la base), el desplazamiento relativo de la masa sísmica respecto al contenedor y el desplazamiento absoluto de la masa en función del tiempo se simbolizan por  $y(t)$ ,  $z(t)$  y  $x(t)$ , respectivamente. Expresando el movimiento absoluto en función de los de arrastre y relativo, se tiene:

$$x(t) = y(t) + z(t) \quad (3-1)$$

Se había mencionado que  $z(t)$  es el desplazamiento que puede ser medido. Aunque se desea en última instancia determinar  $y(t)$ , esta variable se puede inferir, precisamente de la respuesta  $z(t)$ .

Utilizando la 2da. ley de Newton, la ecuación que describe el movimiento del sistema se deduce a partir de :

$$F_{in} + F_a + F_m = 0 \quad (3-2)$$

donde  $F_a$  , es la fuerza del amortiguamiento y  $F_m$  ,la del muelle. Como la fuerza de inercia,  $F_{in}$  , es igual a la masa por la aceleración absoluta del cuerpo, entonces:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = 0 \quad (3-3)$$

siendo  $\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t) + \ddot{z}(t)$ . Sustituyendo  $\ddot{x}(t)$  en la Ec. (3-3) , queda:

$$m\ddot{y}(t) + m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = 0$$

luego arreglándola,

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = -m\ddot{y}(t) \quad (3-4)$$

La Ec. (3-4) es diferencial de segundo orden y no homogénea, que describe el movimiento forzado del sistema lineal representado. La solución homogénea de esta ecuación ha sido estudiada previamente y no se repetirá aquí. Se tratará a continuación, la solución particular. Considérese que la excitación es armónica del tipo,

$$y(t) = Y \cos \omega t \quad (3-5)$$

donde  $\omega$  , es la frecuencia angular de la función forzante y  $Y$  su amplitud. Derivando dos veces la Ec. (3-5) respecto al tiempo:

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 Y \cos \omega t \quad (3-6)$$

Sustituyendo  $\ddot{y}(t)$  en la Ec. (3- 4) y dividiendo por la masa  $m$ , se tiene,

$$\ddot{z}(t) + \frac{c}{m} \dot{z}(t) + \frac{k}{m} z(t) = \omega^2 Y \cos \omega t \quad (3-7)$$

donde  $\frac{k}{m} = \omega_n^2$  y  $\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$  como fueron definidos anteriormente; siendo  $\omega_n$  la frecuencia angular natural del sistema y  $\xi = c/c_c$  es la relación de amortiguamiento. Recuerdese que  $c_c = 2\sqrt{km}$  es el coeficiente de amortiguamiento crítico.

De esta manera, la ecuación se escribirá como:

$$\ddot{z}(t) + 2\xi\omega_n\dot{z}(t) + \omega_n^2 z(t) = \omega^2 Y \cos\omega t \quad (3-8)$$

La solución particular no desaparece para un tiempo  $t$  grande y es conocida, como la solución de estado estable para la excitación armónica considerada. En virtud del hecho de que el sistema es lineal, el principio de superposición se puede aplicar y las soluciones de estado estable, así como la transitoria pueden obtenerse separadamente y luego combinarlas para obtener la solución completa.

Como la fuerza de excitación es armónica se verifica fácilmente, que la respuesta de estado estable  $z(t)$  es también armónica y tiene la misma frecuencia  $\omega$ .

Asumiremos entonces que,

$$z(t) = Z \cos(\omega t - \phi) \quad (3-9)$$

donde  $Z$  y  $\phi$  son la amplitud y el ángulo de fase de la respuesta, respectivamente, y como es lógico, magnitudes que deberán ser determinadas.

Sustituyendo, entonces, la solución (3-9) propuesta y sus primera y segunda derivadas en la Ec. (3-8), se tiene:

$$-\omega^2 Z \cos(\omega t - \phi) + 2\xi\omega_n[-\omega Z \sin(\omega t - \phi)] + \omega_n^2 Z \cos(\omega t - \phi) = \omega^2 Y \cos(\omega t)$$

agrupando,

$$Z(\omega_n^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \phi) - 2\xi\omega_n\omega Z \sin(\omega t - \phi) = \omega^2 Y \cos(\omega t).$$

Designando ahora  $\alpha = \omega t - \phi$  y por ende  $\omega t = \alpha + \phi$ , entonces:

$$Z(\omega_n^2 - \omega^2) \cos\alpha - 2\xi\omega_n\omega Z \sin\alpha = \omega^2 Y \cos(\alpha + \phi)$$

conociendo que  $\cos(\alpha + \phi) = \cos\alpha \cdot \cos\phi - \sin\alpha \cdot \sin\phi$  y sustituyendo en la ecuación anterior,

$$Z(\omega_n^2 - \omega^2) \cos\alpha - 2\xi\omega_n\omega Z \sin\alpha = (\omega^2 Y \cos\phi) \cos\alpha - (\omega^2 Y \sin\phi) \sin\alpha$$

Para que esta igualdad se cumpla tiene que ocurrir que los coeficientes de  $\cos\alpha$  y  $\sin\alpha$  a ambos lados sean iguales, respectivamente, esto es:

$$Z(\omega_n^2 - \omega^2) = \omega^2 Y \cos\phi \quad (3-10)$$

y que,

$$2\xi\omega_n\omega Z = \omega^2 Y \sin\phi. \quad (3-11)$$

Dividiendo la Ec. (3-11) entre la Ec. (3-10), se obtiene:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (3-12)$$

Por otro lado, despejando  $\cos\phi$  y  $\sin\phi$  en las ecuaciones (3-10) y (3-11), elevando al cuadrado y sumándolas, queda:

$$\begin{aligned} \frac{Z^2(\omega_n^2 - \omega^2)^2}{\omega^4 Y^2} + \frac{Z^2(2\xi\omega_n\omega)^2}{\omega^4 Y^2} &= 1 \\ \frac{Z^2}{\omega^4 Y^2} \left[ (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2 \right] &= 1 \\ Z &= \frac{Y\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \end{aligned} \quad (3-13)$$

finalmente,

$$Z = \frac{Y\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (3-14)$$

Las Ecs. (3-12) y (3-14) al sustituirse en la Ec. (3-9) ofrece la solución particular de las Ecs. (3-7), (3-8).

Como  $Z$  es la amplitud máxima del desplazamiento relativo  $z(t)$  y  $Y$  es la amplitud máxima del desplazamiento de arrastre  $y(t)$  (de la excitación o perturbación), la relación  $Z/Y$  ya no es igual al factor de magnificación,

$$H(\omega) = \frac{1}{\left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3-15)$$

visto en el capítulo anterior.

En este caso particular, el cociente dimensional correspondiente es:

$$\frac{Z}{Y} = \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(\omega)| \quad (3-16)$$

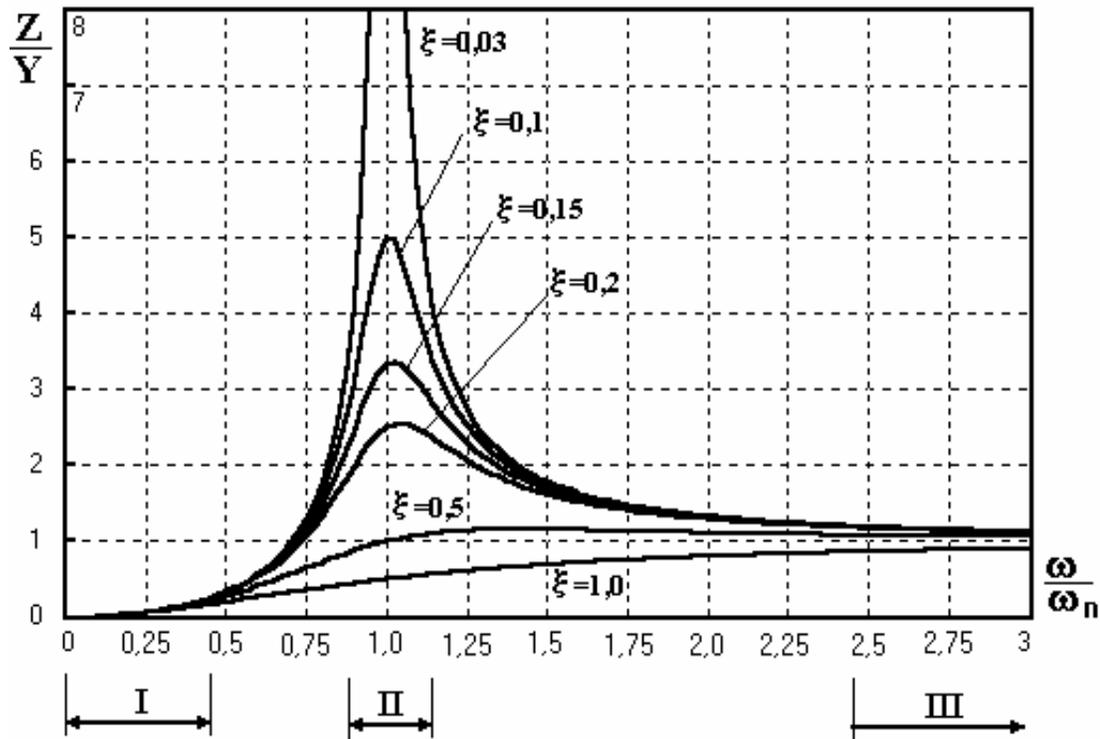
Una gráfica de  $\left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(\omega)|$  vs.  $\frac{\omega}{\omega_n}$  para diferentes valores de la relación de amortiguamiento

$\xi$  se muestra en la Fig. 3.5, y en la Fig. 3.6 se muestra la gráfica del ángulo de fase,

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

obtenido de la Ec.(3-12) para diferentes valores de la relación de amortiguamiento.

Fig. 3.5



En la Fig. 3.5 se pueden distinguir tres zonas indicadas en números romanos. En la zona II, donde el intervalo de frecuencias es  $\omega \approx \omega_n$  los sistemas masa-muelle presentan grandes amplitudes de oscilación. Por esto, los instrumentos sísmicos diseñados de esta manera son del tipo de lectura por indicación de frecuencia. Estos utilizan un juego de diferentes frecuencias naturales, logradas con masas, muy próximas unas a otras. La verificación, cuya frecuencia natural sea la más cercana a la frecuencia de excitación tendrá la mayor amplitud de desplazamiento. Una escala de frecuencias indicará la frecuencia medida o comparada.

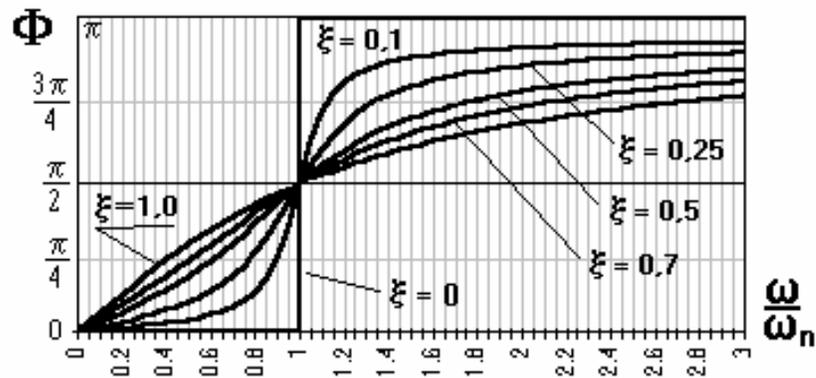
En la zona I, donde el intervalo de frecuencias  $\omega \ll \omega_n$  la ecuación (3-16) se convierte en:

$$\frac{Z}{Y} \cong \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

debido a que el factor de magnificación  $|H(\omega)|$  es muy cercano a la unidad. Esta ecuación también puede ser escrita como:

$$Z \cong \frac{1}{\omega_n^2} (Y\omega^2)$$

donde  $Y\omega^2$ , es la aceleración máxima de la base que está siendo medida. En este caso el instrumento mide cantidades proporcionales a la aceleración de la estructura y se denomina, evidentemente, acelerómetro.



**Fig. 3.6** Ángulo de fase del sistema elástico del instrumento; referido a el desplazamiento relativo  $Z$ , respecto a la aceleración de la base.

Estos instrumentos tienen una elevada frecuencia natural debido a la pequeña masa sísmica y muelle de alto coeficiente de rigidez. Gracias a estas características los acelerómetros son, fundamentalmente, de pequeñas dimensiones, lo que los hace muy convenientes para la medición en máquinas y estructuras pequeñas.

### 3.1.1.3 Distorsiones de señales.

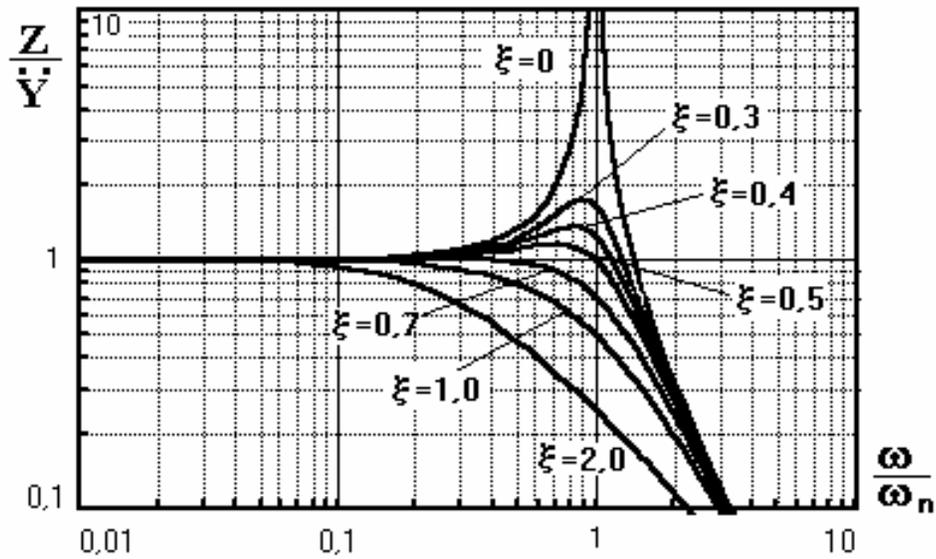
La señal de salida del acelerómetro se distorsiona debido a que la amplitud y el cambio de fase no son lineales con la frecuencia, cuando es utilizado fuera de los límites normales de operación. Este factor debe ser considerado especialmente para las formas de ondas complejas o para vibraciones periódicas compuestas de diferentes armónicos, como suele tenerse, por ejemplo, en el movimiento mecánico de máquinas rotatorias. Cuando armónicos diferentes son distorsionados no uniformemente, la señal eléctrica de salida puede diferir significativamente de la de entrada, dando lugar a resultados erróneos. Por esta causa existen intervalos de respuesta de frecuencia para estos sensores, de tal manera que las distorsiones quedan más allá de los límites de trabajo.

Es posible realizar un análisis, en primera aproximación, si se grafica en escala log-log la respuesta del sensor, dada por la Ec. (3-16), ahora, respecto a la aceleración  $\ddot{y}$  de la base vs.  $\frac{\omega}{\omega_n}$ .

Previamente es conveniente aclarar, que según se observa de la Ec.(3-6),  $Z = -\omega^2 Y$ , y por ende:

$$\frac{Z}{\ddot{y}} = -\frac{1}{\omega_n^2} |H(\omega)| \quad (3-17)$$

donde el signo menos nos indica un desfase de  $180^\circ$  entre la señal de salida, representada por el desplazamiento relativo, y la de entrada, por la aceleración de la base.



**Fig. 3.7** Respuesta del sensor respecto a la aceleración  $\ddot{Y}$  de la base vs  $\frac{\omega}{\omega_n}$ .

Como se observa de la Fig. 3.7, el desplazamiento relativo  $Z$  es prácticamente igual, en cantidad, a la amplitud de la aceleración  $\ddot{Y}$  para pequeños valores de la relación  $\frac{\omega}{\omega_n}$ . Si el sensor no está amortiguado, la curva de respuesta mostrada es plana para  $\omega/\omega_n < 0,2$ . Así, un acelerómetro de este tipo puede utilizarse para medir aceleración, cuando la mayor frecuencia de vibración impuesta no exceda aproximadamente el 20 % de la  $\omega_n$  del acelerómetro.

El intervalo de frecuencias posible a medir se incrementa a medida que crece la relación de amortiguamiento, hasta un cierto valor óptimo de  $\xi$ . Cuando la fracción de amortiguamiento es de aproximadamente igual a 0,65 el acelerómetro debe dar respuestas de buena exactitud en la medición de frecuencias hasta el 60 % de la frecuencia natural montada en el sensor.

Como se infiere de la gráfica que se analiza (Fig. 3.7), el intervalo de frecuencias útil de un sensor crece en la medida que la frecuencia natural se incrementa. Sin embargo, la deformación del muelle en un acelerómetro es inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia natural, por ejemplo, para un valor de  $\ddot{Y}$ , el desplazamiento relativo es directamente proporcional a  $\frac{1}{\omega_n^2}$  (ver

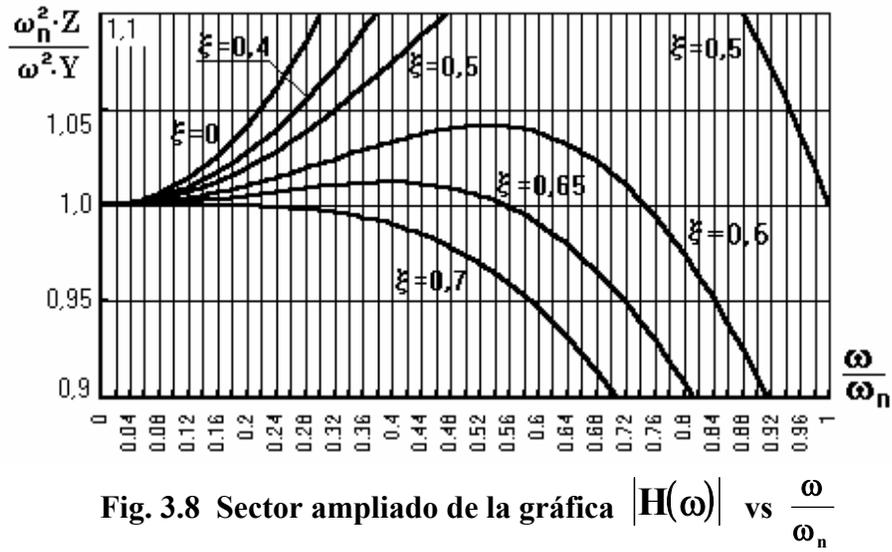
Ec. 3-17) . En consecuencia, el elemento piezoeléctrico sensible tendrá menor deformación y su señal eléctrica será muy pequeña, por tanto, requiriéndose alto nivel de amplificación hasta que sea útil para los propósitos de indicación, señalización o registro de la señal. Por esta causa se realiza un compromiso entre la alta sensibilidad y la elevada frecuencia natural que tendrá el acelerómetro en dependencia, claro está, de la aplicación deseada.

### Distorsiones de la amplitud.

El hecho de que la gráfica obtenida en escala logarítmica sea plana y que se concluya que un sensor con  $\xi = 0$  tenga un intervalo de frecuencia útil del 20 % de la frecuencia natural no constituye una valoración aceptable para las mediciones. Por ello, en el análisis posterior se hará referencia al porcentaje de distorsión para las condiciones de uso del instrumento.

Analicemos un sector de la gráfica de la familia de curvas  $\frac{\omega_n^2 Z}{\omega^2 Y}$  vs  $\frac{\omega}{\omega_n}$  para algunos valores de la relación de amortiguamiento  $\xi$  . En esencia, se mostrará una parte de la gráfica de  $|H(\omega)|$  vs  $\frac{\omega}{\omega_n}$  como se infiere de las Ecs. (3-15) y (3-16) para distorsiones de  $\pm 5\%$  en amplitud.

El intervalo en el cual  $|H(\omega)|$  es aproximadamente la unidad es muy pequeño para relaciones de amortiguamiento ligero, lo que implica que la frecuencia natural de acelerómetros con  $\xi$  pequeña debe ser significativamente mayor que la frecuencia del movimiento a medir. Para incrementar el intervalo de utilidad del instrumento se requieren mayores amortiguamientos.



**Fig. 3.8 Sector ampliado de la gráfica  $|H(\omega)|$  vs  $\frac{\omega}{\omega_n}$**

Puede verse de la Fig. 3.8 que un acelerómetro con amortiguamiento nulo puede operar con el error indicado dentro del intervalo  $0 \leq \frac{\omega}{\omega_n} \leq 0,2$  ; por otro lado, para una relación de amortiguamiento de 0,6 el instrumento puede trabajar hasta  $(\omega/\omega_n) = 0,84$  con el mismo error.

En conclusión, las distorsiones en la amplitud establecen un límite a la frecuencia superior de trabajo del acelerómetro, que es inferior a la frecuencia natural montada en el sistema sísmico.

Distorsiones de fase (corrimiento).

El cambio de fase es el retardo en tiempo entre la señal mecánica de entrada y la señal eléctrica de salida de un sistema de instrumentación en general, y de un acelerómetro, en particular. A no ser que a las características de cambio de fase de un sistema de medición se le impongan ciertos requerimientos, se puede introducir una distorsión que consiste en la superposición de vibración en algunas frecuencias diferentes.

Considérese en primer lugar un acelerómetro para el cual, el ángulo de fase  $\phi$  está dado por la Fig. 3.6 . Si el instrumento no está amortiguado, entonces,  $\phi = 0$  para valores de  $\omega/\omega_n < 1$ ; así es que la fase del desplazamiento relativo  $Z$  es igual a la de la aceleración medida, para todos los valores de frecuencia del intervalo útil del acelerómetro. Por tanto, un sensor no amortiguado mide

la aceleración sin distorsión de fase, pero tal tipo de instrumento no es muy deseado debido a las distorsiones de la amplitud.

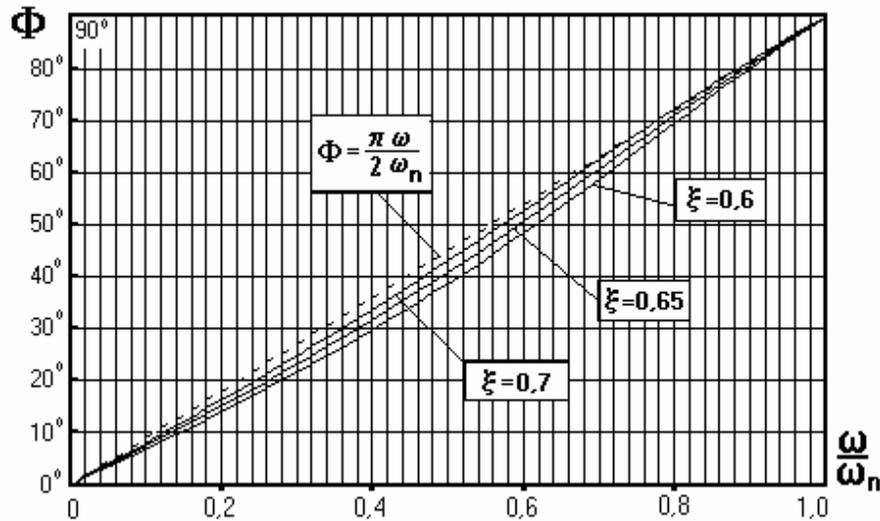


Fig. 3.9 Sector ampliado de  $\Phi = f\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ , representada en fig. 3.6

En la Fig. 3.9 se muestra un sector ampliado de la Fig. 3.6 . En ella se grafican las curvas para  $\xi = 0,6 ; 0,65$  y  $0,7$  y en línea discontinua, la recta de pendiente  $\pi/2$ . Cuando la relación de amortiguamiento es de alrededor de  $0,7$  ; existe una relación prácticamente lineal entre el ángulo de fase y la frecuencia, que bien puede aproximarse por:

$$\Phi = \frac{\pi\omega}{2\omega_n} \quad (3-18)$$

Al medir la componente de frecuencia  $i$ -ésima de una vibración periódica, dada por la Ec.(3-9) , esta se transforma en:

$$z_i(t) = Z_i \cos(\omega_i t - \Phi) \quad (3-19)$$

y sustituyendo el desfase dado por la Ec.(3-18) , se obtiene:

$$z_i(t) = Z_i \cos\omega_i\left(t - \frac{\pi}{2\omega_n}\right) \quad (3-20)$$

En este caso, para cada componente de frecuencia, el retardo o diferenciación de tiempo  $\Delta t = \frac{\pi}{2\omega_n}$  es el mismo, por lo cual la relación de amortiguamiento  $\xi = 0,7$  es la más deseada, debido a que las distorsiones de fases son muy pequeñas y las distorsiones en la amplitud se mantienen dentro de los límites del  $\pm 5 \%$ , siendo la  $\omega$  a medir igual a  $0,58 \omega_n$ .

Con otras palabras, el movimiento relativo  $Z$  del instrumento es desfasado con relación a la aceleración  $\ddot{x}$  que se mide, sin embargo, el incremento a lo largo del eje del tiempo es una constante independiente de la frecuencia. Consecuentemente, la forma de onda de la señal de salida del acelerómetro no estará distorsionada, pero tiene una diferencia de fase con respecto a la forma de onda de la vibración que está siendo medida.

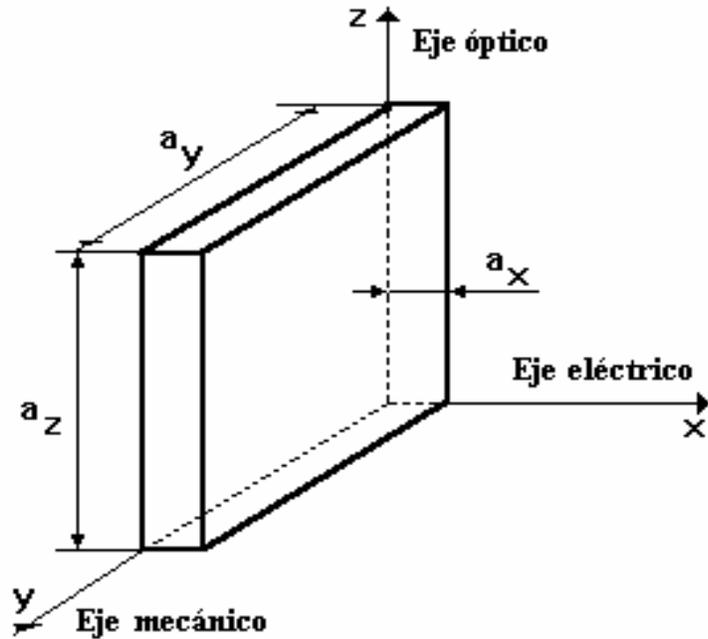
Como se aprecia en la Fig. 3.6, cualesquiera otros valores de la relación de amortiguamiento  $\xi$  alejados de  $0$ ;  $0,7$  y  $0,65$ , inclusive, darán lugar a cambios no lineales de la fase con la frecuencia y, lógicamente, la correspondiente distorsión de la forma de onda.

#### **3.1.1.4 Materiales y efecto piezoeléctricos.**

El funcionamiento de los sensores que miden la aceleración de un punto de un cuerpo se fundamenta en la utilización del efecto piezoeléctrico, que se observa en varios cristales, como: el cuarzo, la turmalina, etc. Los acelerómetros que usan el cuarzo (óxido de silicio) en calidad de convertidor primario, adquirieron mayor utilización práctica, inicialmente, que los que emplean otros cristales. Esto se debió a las notables cualidades del cuarzo el que:

- no es higroscópico, es decir que no absorbe agua
- posee gran resistencia mecánica,
- presenta buenas cualidades aislantes, y
- sus propiedades piezoeléctricas prácticamente no dependen de la temperatura, en un intervalo suficientemente amplio ( $20 \div 400^\circ \text{C}$ ).

Sin embargo, su pequeña constante piezoeléctrica, comparada con los cristales artificiales actuales han transformado su uso práctico, desplazándolo hacia el empleo como elemento sensible de acelerómetros patrones y de laboratorio.



**Fig. 3.10 Corte de un cristal de cuarzo**

Si de un cristal de cuarzo se corta una placa rectangular, como la mostrada en la Fig. 3.10, con las caras paralelas a los ejes (denominado corte de Curie), y la misma se somete a compresión o tracción a lo largo de su eje eléctrico, entonces, en las caras perpendiculares a dicho eje surgirán cargas electrostáticas de igual valor pero de signo contrario. Al pasar de la compresión a la tracción, los signos de las cargas cambian según la variación del signo de la fuerza que actúa a lo largo del eje eléctrico.

El valor de la carga  $q_x$ , que surge a consecuencia de la acción de la fuerza  $F_x$ , cuya línea de acción es a lo largo del eje eléctrico, o de la presión  $p_x$ , que actúa sobre el área de la cara  $S_x = a_y \cdot a_z$ , es:

$$q_x = k \cdot F_x = k \cdot p_x \cdot S_x \quad (3-21)$$

donde,  $k$  es la constante piezoeléctrica en Coulomb / Newton (C/N).

El coeficiente  $k$  no depende de las dimensiones del cristal, pero sus valores son distintos para diversas rocas de cuarzo. El valor de esta constante para el cuarzo frecuentemente utilizado en acelerómetros es de  $2,1 \cdot 10^{-12}$  C/N.

Si al actuar la presión  $p_x$ , se suprime toda la carga de las caras  $S_x$  y luego la presión  $p_x$  se modifica hasta  $p'_x$ , entonces, en dichas caras vuelve a surgir una carga  $q'_x$ , calculada como:

$$q'_x = k(p'_x - p_x)S_x \quad (3-22)$$

Cuando se tiene una fuerza según el eje  $y$ , digamos,  $F_y$  actuando a lo largo del eje mecánico; en las caras  $S_x$  también surgen cargas eléctricas. Si la fuerza  $F_y$  es de compresión los signos de las cargas son contrarios a los de las que aparecen bajo la acción de la fuerza de compresión  $F_x$ . De esta manera, el efecto de tracción del cuarzo en dirección de un eje es equivalente al efecto de su compresión en dirección de otro eje. Se ha establecido que el valor de la carga  $q_y$  que surge en las caras  $S_x$ , como resultado de la acción de la fuerza  $F_y$ , es

$$q_y = -k \cdot p_y \cdot S_x = -k \frac{F_y}{a_x \cdot a_z} S_x \quad (3-23)$$

donde  $a_x \cdot a_z = S_y$ , es el área sobre la que actúa la fuerza  $F_y$ . Si sustituimos la magnitud  $S_x$  por su producto indicado, queda:

$$q_y = -k \frac{F_y}{a_x \cdot a_z} a_y \cdot a_z \quad (3-24)$$

$$q_y = -k \cdot F_y \frac{a_y}{a_x} \quad (3-25)$$

La Ec.(3-25) demuestra, que el incremento de la carga  $q_y$  con una misma fuerza  $F_y$ , puede lograrse aumentando el valor de  $a_y$  o disminuyendo el de  $a_x$ . Este resultado válido tanto para cristales naturales, como artificiales ofrece un criterio de diseño para las cerámicas piezoeléctricas policristalinas, utilizadas en acelerómetros.

La acción de la fuerza  $F_z$  en dirección del eje óptico no provoca el surgimiento de cargas electrostáticas. Se dice, que el efecto piezoeléctrico es longitudinal, si las cargas electrostáticas en las caras  $S_x$  surgen como resultado de la acción de las fuerzas  $F_x$  y es transversal si las cargas, en esas mismas caras  $S_x$ , surgen bajo la acción de las fuerzas  $F_y$ . En los casos de efecto piezoeléctrico

longitudinal, la constante  $k$  suele representarse por el símbolo  $d_{33}$  y ante el efecto transversal por  $d_{31}$ .

### 3.1.1.5 Obtención del material piezoeléctrico artificial.

Uno de los materiales cerámicos piezoeléctricos más ampliamente utilizado es el Titanato de Bario ( $BaTiO_3$ ). Las cerámicas policristalinas de este material, son fabricadas por sinterización de polvos de óxido de Bario ( $BaO$ ) y bióxido de Titanio ( $TiO_2$ ). La dimensión del grano de la cerámica piezoeléctrica depende de la temperatura y del tiempo de horneado. Los granos de menores dimensiones son los de mayor resistencia a las fuerzas de compresión y los de mayor estabilidad.

Para obtener el efecto piezoeléctrico en un material cerámico ferroeléctrico, es necesario polarizar el material con un voltaje constante o, aplicarlo y retirarlo, dejando una polarización residual. El último proceso algunas veces es efectuado, aumentando la temperatura de la cerámica por encima de su temperatura de Curie (punto por encima del cual se pierden las propiedades ferroeléctricas), o a una temperatura de cambio de fase, para la cual, la tensión de compresión es pequeña. Así, aplicando un voltaje de polarización y enfriando la cerámica lentamente, bajo la influencia de la polarización, se obtiene el efecto. El voltaje de polarización oscila, para diferentes materiales, entre:  $1,5 \cdot 10^6$  y  $4 \cdot 10^6$  volts / m de espesor de la cerámica.

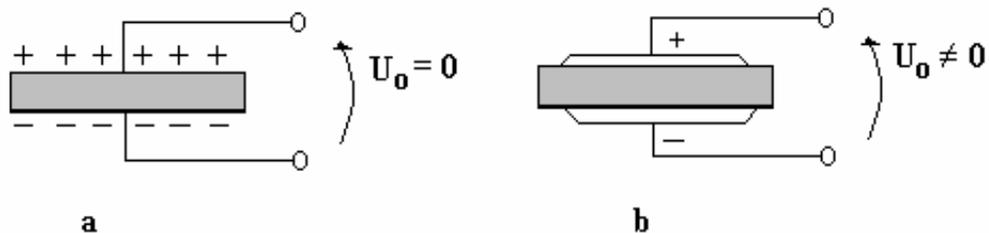
Debido a su alta constante dieléctrica y elevada sensibilidad, las cerámicas ferroeléctricas policristalinas polarizadas pueden ser utilizadas para medir pequeñas tensiones  $\sigma$ , cualidad muchas veces superior a la de los cristales piezoeléctricos naturales. Este factor, junto con la facilidad de fabricación y el relativamente bajo costo, hacen que tales materiales sean útiles en acelerómetros, así como para otros instrumentos de medición de presión, fuerza, tensión, etc. La calidad de estos materiales se refleja también a través de su envejecimiento. De mala calidad es aquel material cerámico, que su sensibilidad empeora apreciablemente con el tiempo. Para grandes  $\sigma_c$  y altas temperaturas de trabajo, ellos van tendiendo hacia su depolarización. Esta es una de las causas por la cual, las cerámicas piezoeléctricas policristalinas no deben utilizarse como patrones de laboratorio.

Para tales efectos, los cristales de cuarzo son de calidad superior al reproducir con fidelidad en el tiempo y ante múltiples fenómenos y cambios de los agentes externos.

Entre las constantes fundamentales de las cerámicas policristalinas piezoeléctricas, pueden mencionarse las siguientes:

- módulo de Young  $E$  (Pa) ;
- capacidad dieléctrica  $\epsilon$  (F/m) ;
- constante piezoeléctrica  $d_{33}$  (o  $d_{31}$ ) (C/N) ;
- voltaje de circuito abierto  $E_o$  (V/m·Pa).

En la Tabla 3-1 se presentan los valores de estos parámetros para diferentes tipos de materiales cerámicos.



**Fig. 3.11 Pastilla de cerámica policristalina sometida a compresión  
a- sin material recolector de cargas; b- con electrodo**

Es imposible extraer las cargas electrostáticas de una pastilla de cerámica policristalina sometida a tensiones de compresión que varíen con el tiempo, en la manera que se muestra en la Fig. 3.11.a. Esto se debe a la composición de la misma. Los materiales cerámicos no son conductores eléctricos, y por tanto, aquellas cargas generadas en la superficie fuera del entorno del cable eléctrico, no pueden ser recolectadas. En la Fig. 3.11.b se representa la solución a este problema. Depositando un material conductor eléctrico sobre las caras paralelas es factible la recolección de las cargas en las superficies. Este material conductor recibe el nombre de electrodo y se utilizan para ello diferentes metales.

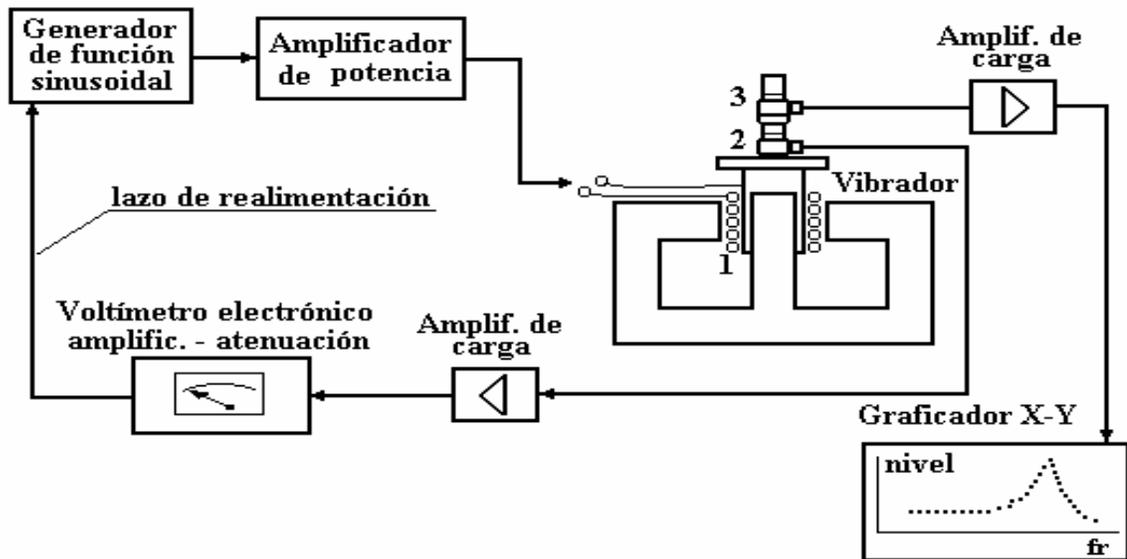
**Tabla 3-1 Propiedades de cerámicas ferroeléctricas a 25° C**

<b>Material cerámico</b>	<b>E (kN/m<sup>2</sup>)</b>	<b>d<sub>31</sub> (pC/N)</b>	<b>d<sub>33</sub> (pC/N)</b>	<b>ε (nF/m)</b>	<b>E<sub>o</sub> (V/m·Pa)</b>
cerámicas de BaTiO <sub>3</sub> comerciales	1,18 · 10 <sup>8</sup>	-56	130 ÷ 160	12,5	1,06 · 10 <sup>-2</sup>
97 % BaTiO <sub>3</sub> + 3 % CaTiO <sub>3</sub>	1,22 · 10 <sup>8</sup>	-53	135	12,3	1,11 · 10 <sup>-2</sup>
96 % BaTiO <sub>3</sub> + 4 % PbTiO <sub>3</sub>	1,14 · 10 <sup>8</sup>	-38	105	8,80	1,2 · 10 <sup>-2</sup>
90 % BaTiO <sub>3</sub> + 4 % PbTiO <sub>3</sub> + 6% CaTiO <sub>3</sub>	1,24 · 10 <sup>8</sup>	-40	115	7,10	1,6 · 10 <sup>-2</sup>
84 % BaTiO <sub>3</sub> + 8 % PbTiO <sub>3</sub> + 8% CaTiO <sub>3</sub>	1,31 · 10 <sup>8</sup>	-27	80	5,30	1,5 · 10 <sup>-2</sup>
80 % BaTiO <sub>3</sub> + 12 % PbTiO <sub>3</sub> + 8% CaTiO <sub>3</sub>	1,28 · 10 <sup>8</sup>	-20	60	4,00	1,5 · 10 <sup>-2</sup>
Clevite Brush Co. PZT-4	8,15 · 10 <sup>7</sup>	-97	235	8,75	2,68 · 10 <sup>-2</sup>
Clevite Brush Co. PZT-5	6,75 · 10 <sup>7</sup>	-140	320	12,00	2,66 · 10 <sup>-2</sup>
Clevite Brush Co. PZT-6	8,65 · 10 <sup>7</sup>	-78	191	8,60	2,2 · 10 <sup>-2</sup>
NbO <sub>3</sub> (K 50 % ; Na 50 %)	1,02 · 10 <sup>8</sup>	-32	80	23,5	3,4 · 10 <sup>-2</sup>
Pb (NbO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>	3,5 · 10 <sup>7</sup>	-11	80	20,0	4,0 · 10 <sup>-2</sup>
Brüel & Kjær PZ-23	-	-	300	-	-

### 3.1.1.6 La curva de respuesta de frecuencia del acelerómetro.

La curva de respuesta de frecuencia de un acelerómetro (también conocida como curva de calibración por frecuencias) es obtenida mediante un sistema como el mostrado en la Fig. 3.12. El generador de funciones entrega la señal eléctrica sinusoidal, a la frecuencia requerida, al amplificador de potencia. Este la amplifica hasta los parámetros de voltaje y corriente alternos, necesarios para el buen funcionamiento del generador de vibraciones o vibrador. Acoplados mecánicamente a la bobina móvil (1) del vibrador se ubican, preferentemente en línea, el acelerómetro de referencia (2) (o patrón de trabajo) unido al acelerómetro (3) cuya curva de respuesta por frecuencias se desea obtener. El acelerómetro de referencia debe poseer una banda de frecuencia hasta la resonancia mucho mayor que aquella del que está en prueba. Los acelerómetros

patrones se caracterizan por ser de pequeña sensibilidad y masa sísmica. La frecuencia del generador va aumentándose (o disminuyéndose) para barrer la banda de frecuencia deseada, la bobina móvil del generador de vibraciones incrementará (o disminuirá) su impedancia, transmitiéndose mayor o menor energía, según el caso. Si se permite semejante alteración la respuesta conseguida no responde a la del acelerómetro bajo prueba, sino a la del sistema elástico del vibrador. Para obtener la curva (en cualquier caso) se necesitará fijar la corriente y el voltaje aplicado a la bobina móvil. Esto se consigue estableciendo la línea de realimentación para lograr la estabilidad automática de ambos parámetros a medida que se varíe la frecuencia. Así se logra la aceleración constante en el plato del vibrador sobre el que se han fijado ambos acelerómetros.



**Fig. 3.12 Esquema de calibración del acelerómetro**

La curva de respuesta por frecuencia es obtenida en el graficador x-y. En la Fig. 3.12 se ha omitido la conexión para la sincronización por frecuencia del graficador proveniente del generador de funciones.

La curva de respuesta de frecuencia de un acelerómetro se presenta en la Fig. 3.13 . El intervalo de frecuencias, sobre el cual se puede tener una señal verdadera y precisa, está aun más limitado con relación a los aspectos estudiados en epígrafes anteriores.

La zona de operación es aquella, en la cual, la sensibilidad del instrumento no sobrepasa un porcentaje establecido respecto a la sensibilidad nominal. Este intervalo puede estar limitado por las características eléctricas y mecánicas del sensor y la instrumentación eléctrica asociada. Estas consideraciones deben estar añadidas a los límites de la amplitud constante para definir completamente la zona útil.

Límite por baja frecuencia. La respuesta mecánica del sistema masa - muelle no impone ningún límite por baja frecuencia para los sensores de aceleración. Inclusive, en la aparición de cargas electrostáticas responden proporcionalmente al estímulo vibratorio por complejo que este sea. Sin embargo, más allá de la aparición de las cargas, estas pueden liquidarse (positivas con negativas) por diferentes causas, antes de ser utilizadas por el sistema de amplificación (se excluye del análisis la característica dieléctrica mencionada en el epígrafe 3.1.1.1).

Los elementos sensibles de generación propia no son factibles de utilizar a frecuencias próximas a los 0 Hz. La limitación por baja frecuencia de los materiales piezoeléctricos está dada por la descarga de la cerámica. Para compresiones estáticas o tensiones que varían lentamente la resistencia de fuga, presente para todos los materiales, causa una reducción de la carga en  $1/e$  veces su valor original en un tiempo  $\tau$ , que viene dado por  $\tau = RC$ ; donde R, es la resistencia de fuga del circuito en su totalidad y C, es la capacitancia equivalente de pastillas, cables y amplificador. Por ejemplo, el acelerómetro y cables pueden tener una capacitancia de  $0,1 \cdot 10^{-9} \leq C \leq 5 \cdot 10^{-9}$  F y una resistencia de  $10^8 \leq R \leq 10^9$   $\Omega$ , dando lugar a una constante de tiempo de 0,01 a 5 s. Mayores  $\tau$  pueden ser obtenidas (hasta varias horas), utilizando cristales piezoeléctricos de cuarzo.

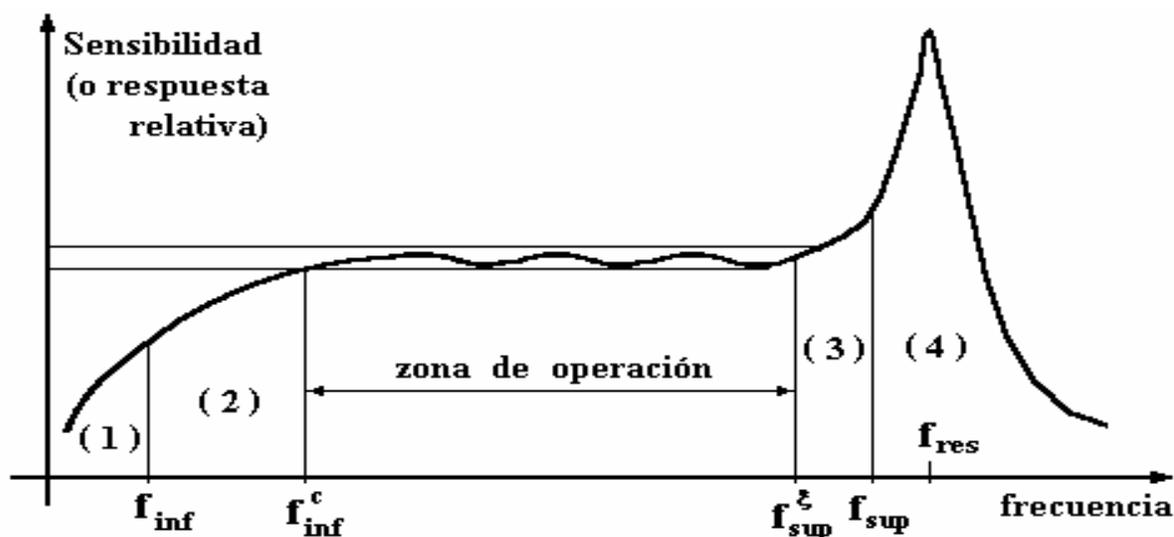


Fig. 3.13 Curva de respuesta por frecuencia del acelerómetro

La presencia de humedad o una temperatura relativamente alta, que produce la disminución de la resistencia a la fuga exponencialmente con ella, puede acrecentar la limitación antes mencionada, por baja frecuencia ( $\tau$  disminuye). Para muchas cerámicas la resistencia de aislamiento a  $260^{\circ}$  puede reducirse a valores inferiores a los  $500 \text{ M}\Omega$ . Por esto, constantemente se busca mejorar el diseño de los sensores. La sensibilidad a la humedad de las cerámicas piezoeléctricas es una característica de las condiciones de la superficie de las pastillas. La humedad conduce a una significativa reducción de la resistencia de aislamiento eléctrico, para valores por encima del 60 % de humedad relativa. Por ende, la característica de resistencia a la fuga de las cerámicas piezoeléctricas depende grandemente de las técnicas de fabricación, de sus procedimientos de manipulación, así como de sus materiales componentes básicos.

Todos estos factores, incluyendo amplificadores y otros componentes del circuito de medición pueden limitar la frecuencia inferior de trabajo de la cadena de medición hasta un valor denominado en lo adelante  $f_{inf}$  (ver Fig. 3.13); que corresponderá a la frecuencia de corte del amplificador por el efecto de fluctuaciones de la temperatura ambiente. Con vistas a evadir completamente las distorsiones de fase, debidas específicamente, a los cables de conexión con el amplificador y la influencia de los cambios de temperatura ambiente sobre el sensor en las mediciones industriales, el

límite inferior puede trasladarse hasta  $f_{inf}^c \approx 10 \cdot f_{inf}$ . Si se supone, de acuerdo a la experiencia práctica, que  $f_{inf} \approx 1 \text{ Hz}$ , entonces  $f_{inf}^c \approx 10 \text{ Hz}$ . En dependencia del tipo de amplificador a utilizar, del diseño del acelerómetro y su objetivo fundamental la  $f_{inf}^c$  puede llevarse hasta 1 ó 0,5 Hz. Más detalles sobre este particular, serán tratados en el epígrafe relacionado con los amplificadores.

Límite por alta frecuencia. El límite superior  $f_{sup}$  está determinado por la resonancia mecánica del sistema masa - muelle montado en el sensor. Este valor que divide las zonas (3) y (4) de la Fig. 3.13, puede desplazarse en dependencia del valor de la relación de amortiguamiento. Para evadir completamente las distorsiones de fase, el límite superior  $f_{sup}^\xi$  puede reducirse hasta  $f_{sup}^\xi \approx (0,2 - 0,25)f_{res}$ , obteniéndose una zona de operación ideal por su aplanamiento. Como resultado de la experiencia práctica se extrae, que para la gran mayoría de los acelerómetros  $f_{sup} = \frac{1}{3}f_{res}$  y equivale a un error del 12 % en la medición de componentes armónicos de alta frecuencia.

Muchos acelerómetros comerciales del tipo de compresión no incorporan una cantidad significativa de amortiguamiento, teniendo prácticamente una relación de amortiguamiento  $\xi \leq 0,1$  (en los límites del amortiguamiento estructural). Por esto es mejor operar a frecuencias más bajas que las de la zona de resonancia limitada por  $f_{sup}$ . En dependencia de la situación objetiva que se presente, así deberán ser las limitantes que establezca el especialista en medición de vibraciones mecánicas.

### 3.1.1.7 Nociones sobre la selección de acelerómetros.

Uno de los criterios fundamentales para la selección del acelerómetro piezoeléctrico es la sensibilidad, la que se define, como el cociente de la señal eléctrica de salida del instrumento respecto a la aceleración que la crea. Esta puede ser expresada ya sea tanto sensibilidad de carga

$$S_q = \frac{q}{m} , \quad \left( \frac{\text{pC} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \quad (3-26)$$

donde  $q$ , es la carga generada a la aceleración  $\ddot{x}$ , como sensibilidad de voltaje

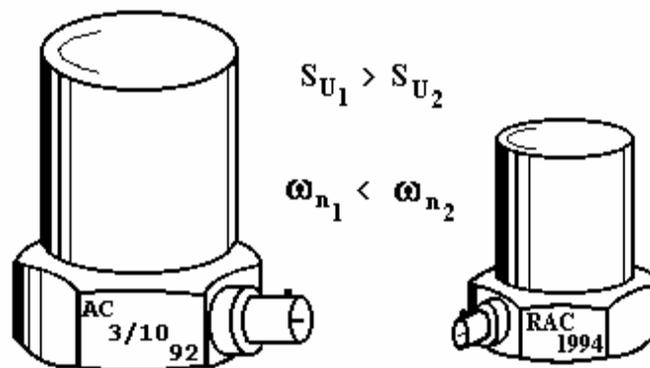
$$S_u = \frac{U}{\ddot{x}}, \quad \left( \frac{\text{mV} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \quad (3-27)$$

donde  $U$ , es el voltaje de salida del sensor.

Ambas sensibilidades están relacionadas por la ecuación

$$S_q = C_t \cdot S_U \quad (3-28)$$

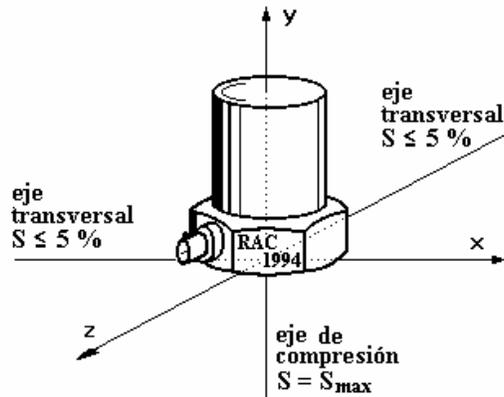
siendo  $C_t$  la suma total de capacitancia del circuito (sensor, cables y preamplificador en caso que esté siendo utilizado).



**Fig. 3.14 Influencia del tamaño en la sensibilidad del sensor**

La sensibilidad de carga depende de muchos factores pero, principalmente, de las propiedades de la cerámica piezoeléctrica policristalina, de su geometría y de la masa sísmica. En dependencia del tamaño del acelerómetro (ver Fig. 3.14) se puede tener un incremento de la sensibilidad para determinada pastilla ferroeléctrica. Como se justificó en epígrafes anteriores, ello se logra a cambio de una reducción de la frecuencia límite superior. La práctica demuestra que el instrumento también se hace más sensible al ruido acústico, por lo que en ocasiones se requiere influir en el diseño para reducirlo.

La sensibilidad transversal es otra característica a tener en cuenta en los acelerómetros. La sensibilidad que muestra el sensor en ejes perpendiculares al de compresión debe ser menor e igual al 5 % de la que presenta en su eje principal. En la Fig. 3.15 se muestran estas direcciones.



**Fig. 3.15 Direcciones de sensibilidad reducida**

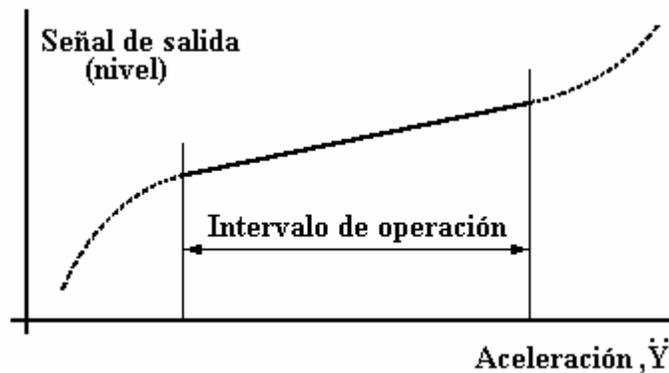
Existen toda una serie de factores ambientales que influyen en mayor o menor grado sobre la sensibilidad de los acelerómetros. Por esto, la magnitud de dichos factores son datos necesarios para la selección. Entre estos factores se tienen:

- la humedad, en el caso que el instrumento no sea sellado (se desprecia el efecto corrosivo sobre el cuerpo del sensor) ;
- las variaciones de temperatura;
- la radiación nuclear;
- la temperatura ambiente;
- los esfuerzos o tensiones en la base (o punto de sujeción) ;
- el ruido sonoro;
- el campo magnético o la interferencia electromagnética intensos;
- el ruido triboeléctrico.

Otros parámetros a considerar en la selección del instrumento se refieren a su peso. El peso del acelerómetro debe ser, como máximo, en un orden menor que el peso de la estructura o la máquina donde este vaya a ser instalado.

Un parámetro ya tratado, pero por ello no menos importante, es el intervalo de frecuencias del acelerómetro, el que debe corresponder al intervalo requerido para las mediciones.

Se define como intervalo dinámico al cociente, expresado en decibeles (dB), entre la amplitud máxima respecto a la amplitud mínima de las señales que pueden ser medidas por el sensor (establecido para algún máximo de distorsión de armónico específico). Cualquier señal cuyo nivel esté fuera de este intervalo será distorsionada; tanto aquella que esté por encima del límite superior, como la que se pierde con el ruido electrónico por el límite inferior. El intervalo dinámico suele representarse como se muestra en la Fig. 3.16 .



**Fig. 3.16 Intervalo de aceleraciones para el trabajo del sensor**

El menor valor de aceleración que puede ser medido es, aproximadamente, aquel que producirá un voltaje de salida equivalente al ruido eléctrico de entrada del preamplificador conectado al acelerómetro cuando el sensor está en reposo. En su intervalo de operación, la salida del instrumento primario es continua y directamente proporcional (ver Fig. 3.16) a la aceleración de la excitación (señal mecánica de entrada). Un acelerómetro comercial sencillo puede ofrecer un intervalo dinámico de 10 000 a 1  $\text{m/s}^2$  (80 dB) que es mucho mayor que el intervalo dinámico de la instrumentación analógica moderna (amplificadores, registradores, analizadores, etc.), la que se corresponde con 60 dB (relación de 1000 : 1 de las amplitudes extremas medidas). La instrumentación digital posee un intervalo dinámico superior (para funciones de voltaje en 16 bit, el intervalo dinámico es de  $\approx 90$  dB).

Como se ha podido deducir, los límites del intervalo dinámico no resultan muy importantes pues existen otros instrumentos que primeramente lo limitan. En segundo lugar, el intervalo de operación

es completamente lineal. Entonces, lo que se debe tener presente consiste en el cuidado sobre la manipulación del acelerómetro, por las causas que se tratan a continuación.

A muy altos valores de aceleración, dependiendo de las particularidades de diseño de cada sensor, pueden ocurrir la no-linealidad, la histéresis o el deterioro. Por ejemplo, grandes fuerzas dinámicas ( $F_d = m \cdot a$ ) pueden producir un voltaje de salida suficiente para reducir permanentemente la sensibilidad del material piezoeléctrico. Además, si las fuerzas dinámicas exceden a las de depolarización o superan a las fuerzas de fijación o apriete, la masa sísmica puede: fracturar la cerámica, en el peor de los casos; así como fisurarla, aunque la última avería no sea detectada en las calibraciones de bajo nivel de aceleración. Las grandes aceleraciones también pueden provocar pequeños corrimientos en la posición del elemento sensible ubicado en el acelerómetro, lo que en ocasiones trae como consecuencia cambios en la sensibilidad del instrumento.

El límite superior de las mediciones de aceleración depende de los diseños específicos y los detalles constructivos del instrumento, estos pueden variar considerablemente de un acelerómetro a otro, aunque el diseño sea el mismo. Ocurre, que dicho límite superior depende, también, de las tolerancias de forma y posición asumidas en el acabado de las piezas; en definitiva, de la precisión de la maquinaria de corte y acabado de metales y de la especialización del operario. No siempre es posible calcular el límite superior de aceleración del sensor. Por tanto, no se debe asumir linealidad a niveles de aceleración para los cuales no se tienen datos de calibración.

### **3.1.2 Otros instrumentos de medición.**

Retomando la gráfica de la Fig. 3.5 , encontramos la zona III en el extremo derecho de la misma, la que no se ha analizado. Cuando  $\omega > \omega_n$  es posible apreciar que,

$$Z \approx Y$$

es decir, el movimiento relativo  $Z$  entre la masa  $m$  y la estructura, detectado por el elemento sensible es prácticamente el mismo, que el desplazamiento  $Y$  de la base que está siendo medida. De esta manera, si es transformado el elemento sensible, de pastillas ferroeléctricas, a otro convertidor más conveniente, es posible construir otros instrumentos de medición, bajo el principio de ser sísmicos (sobre instrumento sísmico ver epíg. 3.1.1.1).

En la Fig. 3.6 se muestra, que para relaciones de amortiguamiento muy pequeñas (es decir,  $\xi \rightarrow 0$ ) el corrimiento de fase (desfasaje) entre la masa  $m$  y la base, es de  $180^\circ$  ( $\phi = \pi$ ). Para amortiguamientos mayores ( $\xi > 0,1$ ) las distorsiones de fase se harán sentir, a menos que se trabaje en zonas de  $\omega \gg \omega_n$ . De lo contrario el instrumento requerirá una instrumentación secundaria capaz de corregir las distorsiones de fase.

Cuando se utiliza como elemento sensible un convertidor de desplazamiento, el instrumento se convierte en sensor sísmico de desplazamiento absoluto. Cuando el elemento sensible es un convertidor de velocidad, el instrumento se convierte en sensor sísmico de velocidad, o simplemente sensor de velocidad.

Esto último se demuestra si se deriva respecto al tiempo las Ecs. (3-5) y (3-9), que representan los desplazamientos de la base y el relativo de la masa respecto a la base, respectivamente, entonces:

$$\dot{z} = -Z \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (3-29)$$

$$\dot{y} = -Y \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (3-30)$$

y al calcular el cociente se tiene,

$$\left| \frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right| = \frac{Z}{Y} \quad (3-31)$$

esto es, el módulo de la relación de velocidades es igual a la relación de desplazamientos relativo y absoluto de la base, lo que lo convierte, también, en instrumento medidor de velocidad.

Los instrumentos sísmicos de medición de desplazamiento deben tener una frecuencia natural  $\omega_n$  muy baja ( $< 10$  Hz). Este aspecto se logra, técnicamente, con pequeños valores del coeficiente de

rigidez  $k$  y relativamente grandes masas  $m$ . De esta manera el instrumento se transforma en un sistema de suspensión muy elástico, voluminoso y pesado en comparación con el acelerómetro.

### 3.1.2.1 Instrumentos para medir la velocidad de la vibración.

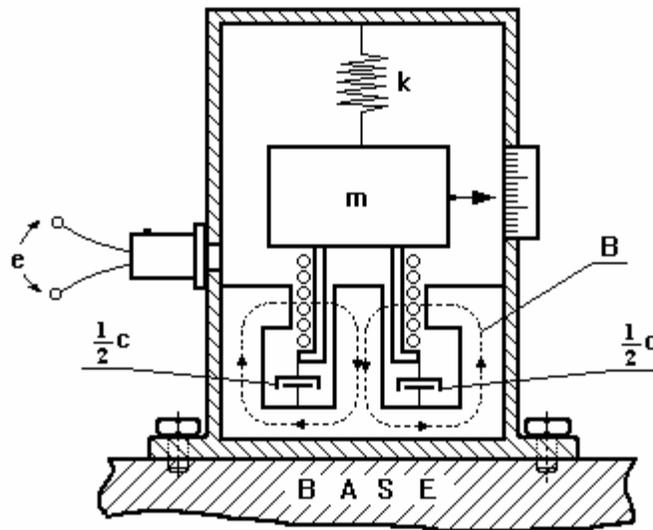
Los medidores de la velocidad de la vibración son instrumentos sísmicos que incluyen, principalmente, como elemento sensible, a los convertidores electrodinámicos. En la Fig. 3.17 se presenta el esquema elemental de un instrumento de este tipo. Donde  $c$ ,  $k$  y  $m$  son las magnitudes estudiadas anteriormente en el epígrafe 3.1.1.2 . Como elemento nuevo se tiene el imán permanente, que genera la densidad de flujo magnético  $B$ . Este núcleo puede ser también un electroimán, para el cual se necesitará del enrollado correspondiente.

La bobina móvil, formada por vueltas de conductores eléctricos de longitud  $l$ , se desplaza en el entre hierro del imán. En ella se induce el voltaje  $e$  al cortar los conductores las líneas de flujo magnético. Este voltaje o señal eléctrica de salida del sensor, es proporcional a la velocidad relativa  $v$  con que se mueve la bobina. Por esta razón, el instrumento constituye un sensor de velocidad. El voltaje  $e$ , de circuito abierto, se obtiene como:

$$e = B \cdot l \cdot v \quad , \quad (3-32)$$

en la que sus unidades serán volts, cuando  $B$  se encuentre en Tesla;  $l$  en m y;  $v$  en m/s.

El sensor de velocidad, de generación propia, puede ser diseñado con estructura diferente: con el imán móvil y la bobina fija.



**Fig. 3.17 Sensor de velocidad de la vibración**

Los convertidores electrodinámicos generan una señal de voltaje relativamente grande, aspecto que a veces le permite trabajar sin amplificador, particularmente, a bajas frecuencias, donde su voltaje de salida es mayor en comparación con muchos otros tipos de convertidores. La impedancia de la bobina es pequeña, inclusive, a relativamente altas frecuencias; por lo que con un voltímetro digital, con escala en valor efectivo o pico, de alta impedancia de entrada la medición directa es realmente posible.

Este tipo de sensor permite el diseño de grandes amplitudes de desplazamiento. En ocasiones, su uso está limitado por su elevado peso con relación a la estructura a medir. Para aquel sensor, en que la bobina está sísmicamente montada, la masa que se fija a la estructura corresponde, prácticamente, al peso total del instrumento. Cuando el imán permanente constituye la masa sísmica, la masa adicionada a la estructura oscilante es menor, que el peso total del sensor de velocidad.

Por su peso, estos sensores deben fijarse rígidamente a la estructura, particularmente, para mediciones de movimiento mecánico de alta frecuencia. La resonancia de contacto (existente entre el sensor y la estructura) debe ser considerablemente mayor, que la frecuencia más alta de las

oscilaciones a medir. La resonancia de contacto para estos tipos de instrumentos es de  $\sim 3$  kHz , cuando se fija con pernos.

Precaución especial ha de tenerse con este tipo de sensor al medir velocidad de la vibración en máquinas que generen campos magnéticos o electromagnéticos intensos, como por ejemplo, en los grandes motores y generadores eléctricos. Esta situación es evidente, ya que puede alterarse la magnitud del campo magnético **B**, que debe ser constante en el instrumento.

Muchos diseños de este tipo de sensor de velocidad pueden usarse para medir vibraciones tanto en la dirección vertical, como en la horizontal (entiéndase, el instrumento parado o acostado). En algunos casos, se necesita ajustar los muelles del sistema elástico para compensar el desplazamiento de la masa sísmica debido a su propio peso, cuando la dirección de la posición es cambiada. Independientemente de la posición, la sensibilidad transversal del instrumento es pequeña ( $\approx 4$  %).

Los medidores de velocidad electrodinámicos son estables para oscilaciones mecánicas menores de  $30$  g , es decir, unos  $300$  m/s<sup>2</sup> (como criterio comparativo); y son aceptables al medir en un intervalo de  $10$  Hz a  $1$  kHz.

Como desventajas de este tipo de sensor se pueden resumir las siguientes:

- relativamente grandes dimensiones y elevado peso;
- caída exponencial de la señal de salida  $e$  al medir por debajo de  $10$  Hz, necesitando correcciones;
- reducida precisión al medir en el entorno de  $1$  kHz;
- sensible influencia en la respuesta del instrumento al medir en presencia de campos magnéticos intensos.

Como establece la norma ISO, la vibración expresada en velocidad es el mejor parámetro para medir oscilaciones. Pero en realidad, no necesariamente, el sensor de velocidad es el mejor tipo de instrumento. Si agregamos, que la señal de aceleración emitida por el sensor piezoeléctrico, se integra con la instrumentación electrónica secundaria produciendo la señal de velocidad, entonces, es otro elemento más a reconocer en las ventajas de los acelerómetros.

### 3.1.2.2 Instrumentos para medir el desplazamiento de la vibración.

Los sensores de desplazamiento son, de igual manera (por lo general), instrumentos sísmicos. Para describir el medidor de desplazamiento, se hará referencia a los de principio inductivo y de corrientes parásitas. Este último como ejemplo de instrumento no sísmico.

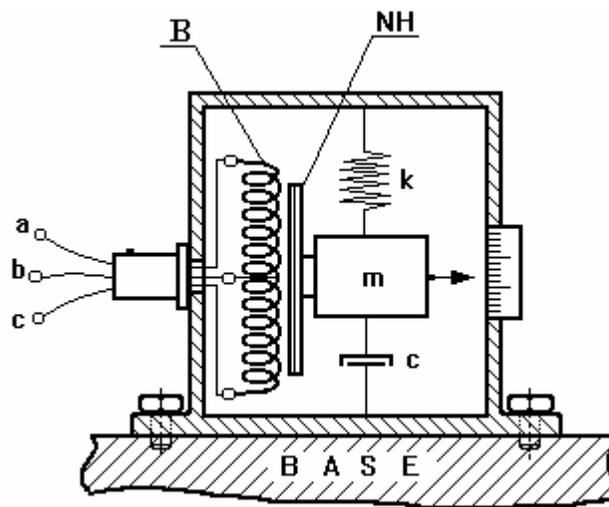


Fig. 3.18 Sensor de desplazamiento de la vibración

En la Fig. 3.18 se muestra el esquema general de un instrumento sísmico para la medición de desplazamiento. Básicamente contiene los mismos elementos constructivos, que el esquema del acelerómetro. El elemento sensible mostrado se basa en el método de reluctancia variable con núcleo móvil. También se pueden montar los casos de inductancia mutua, transformador diferencial, e inclusive, otros principios.

El principio del método consiste en lo siguiente. Téngase una simple bobina **B** de pequeño diámetro, que se encuentra enrollada sobre una geometría cilíndrica. La inductancia **L** de esta bobina es,

$$L = 4 \cdot 10^{-9} \pi \cdot \mu \cdot S \cdot l \cdot n^2 , \quad (3-33)$$

henrys. Donde  $n$ , es el número de vueltas del alambre por unidad de longitud;  $\mu$ , es la permeabilidad del cilindro;  $l$ , es la longitud del cilindro y;  $S$ , es el área del cilindro.

Si la longitud de la bobina se llena, prácticamente, con el núcleo de hierro NH, entonces la inductancia de esta longitud limitada por el núcleo, constituye la parte fundamental de la inductancia total de la bobina. Si el resto de la bobina está llena de aire o de algún núcleo de material de pequeña permeabilidad, contribuirá muy poco a la inductancia total de la bobina. Por tanto, para pequeños desplazamientos del núcleo magnético, la inductancia de la bobina es aproximadamente proporcional a la longitud del núcleo dentro de ella. La bobina suele tener una conexión central **b**, como se muestra, siendo sus extremos los puntos **a** y **c**.

Cuando el núcleo se mueve hacia arriba o hacia abajo, la inductancia de la mitad de la bobina aumenta mientras, que la de la otra mitad disminuye. Las dos mitades **ab** y **bc** de la bobina son conectadas a dos ramas de un puente de Whetstone de C.A. La salida en este caso es lineal en un intervalo suficientemente considerable. El movimiento del núcleo de la posición para la cual el puente fue inicialmente balanceado, producirá una señal de salida proporcional al desplazamiento.

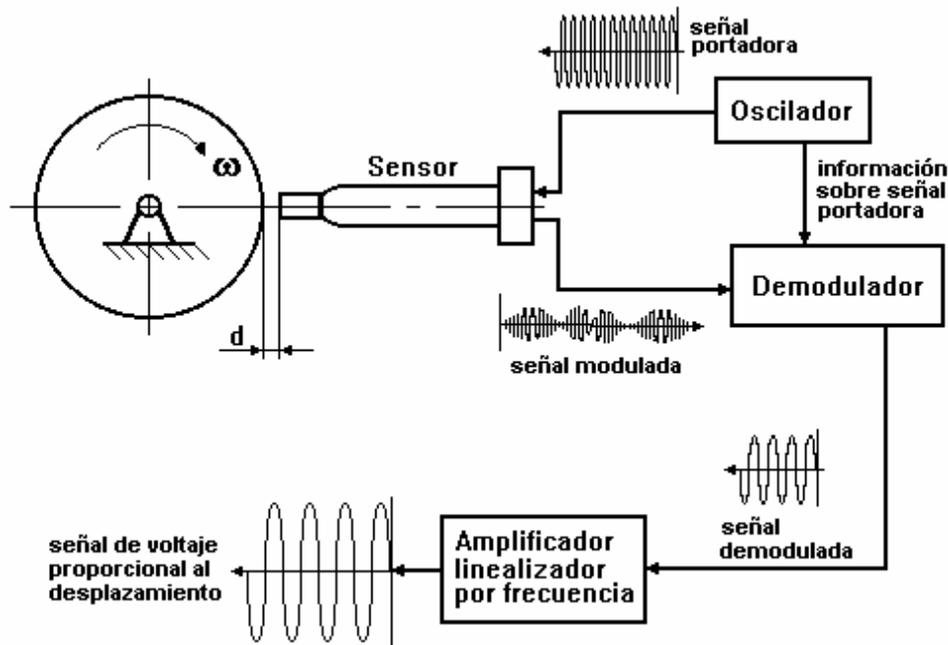
El uso de este tipo de sensor de desplazamiento está limitado al intervalo de las bajas frecuencias, por lo general, de 10 a 100 Hz, aproximadamente. El valor de la frecuencia natural oscila alrededor de los 5 Hz y el intervalo de amplitud es de  $\sim 2$  mm.

Como cualquier otro instrumento sísmico estos pueden trabajar, como acelerómetro, a frecuencias desde mayor que cero hasta 3 Hz. El peso de estos instrumentos puede alcanzar el kilogramo. Con correctores de señales convenientemente situados entre la bobina y el puente de C.A. el intervalo de operación útil, del convertidor de desplazamiento, se ha llegado a extender, por debajo, hasta los 0,7 Hz en los sensores comerciales; valor mucho menor que su frecuencia natural.

Medición por el método sin contacto. Para la medición del desplazamiento puede utilizarse el método “sin contacto”. En este caso el sensor de desplazamiento utiliza el principio de las corrientes parásitas. Este tipo de instrumento es generalmente utilizado en las mediciones de desplazamiento

radial de árboles o ejes en rotación. Puede medir distancia tanto contra un cuerpo estático, como dinámico.

En la Fig. 3.19 se presenta el esquema de trabajo, por bloques, del método de medición de desplazamiento sin contacto. Para su explicación se ha supuesto un disco en rotación a la velocidad angular  $\omega$ .



**Fig. 3.19 Método de medición de desplazamiento sin contacto**

El oscilador genera la señal portadora de alta frecuencia para el sensor, quien crea el campo magnético principal proporcional a la misma. Este campo magnético induce corrientes parásitas en el disco, que de acuerdo a la distancia de separación  $d$ , serán más intensas o menos intensas, inversamente con la distancia. Las corrientes parásitas en el disco generan, a su vez, un campo magnético que se opone al principal, afectando de esta manera la señal portadora. El sensor envía esta información, que se encuentra modulada, al demodulador, quien se encarga de separar la información de la señal portadora. Un paso no menos importante del sistema consiste en la amplificación de la señal y linealización por frecuencia, para que el voltaje efectivo medido a la salida sea proporcional al desplazamiento del disco o del árbol de la máquina rotatoria.

Un inconveniente del método consiste en la necesidad de tener una superficie exterior del árbol suficientemente lisa para evitar errores en los resultados. Las ondulaciones en los bordes del círculo son captadas e indicadas por el sistema instrumental. El desplazamiento del eje del árbol respecto al eje del apoyo (excentricidad) es perfectamente medido por el sistema de medición de desplazamiento sin contacto, teniéndose un máximo o un mínimo de  $d$  cada  $360^{\circ}$ .

La calibración se realiza en posiciones extremas y estáticas del árbol o del disco. La indicación final puede ser en escala de distancia: mm ,  $\mu\text{m}$  o unidades de voltaje efectivo.

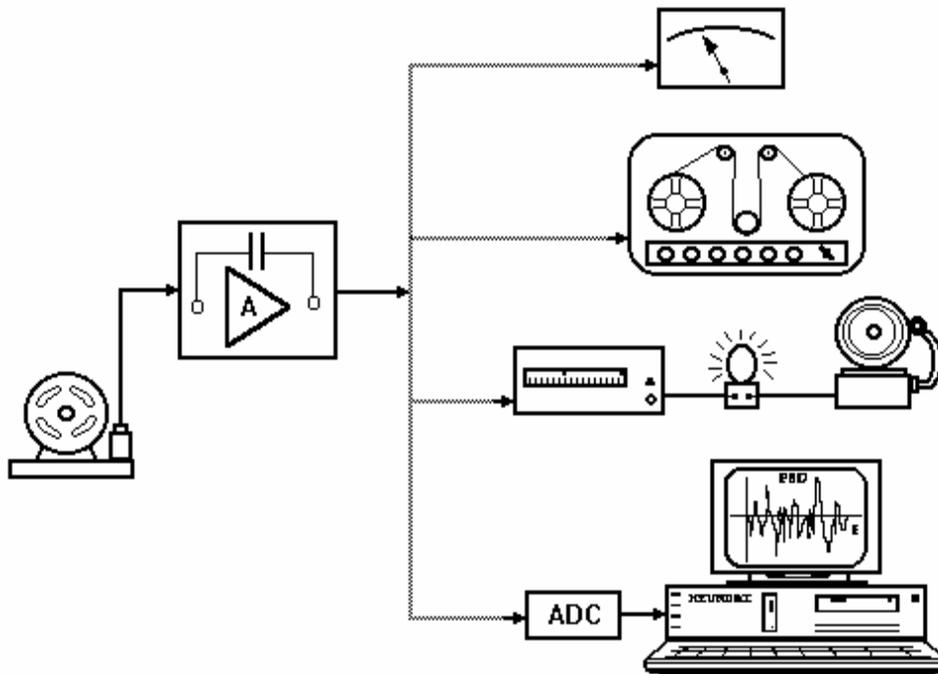
### **3.2 Instrumentación secundaria**

Se denomina instrumentación secundaria a toda aquella que se encarga de transformar la señal emitida por el instrumento primario (sensor), y convertirla en una cantidad útil para la observación, escucha o registro. Es también secundaria por la posición que ocupa en la cadena de medición. En ningún momento debe relacionarse, la condición de secundaria, con el concepto de importancia. Como se analizará en los subepígrafes posteriores, la instrumentación secundaria resulta tan importante, como la primaria.

Entre los instrumentos secundarios trataremos al preamplificador de carga, al osciloscopio y el registro en banda magnética y finalmente al conversor análogo-digital (ADC).

#### **3.2.1 Amplificadores de carga.**

Uno de los elementos importantes de la instrumentación secundaria es el preamplificador.

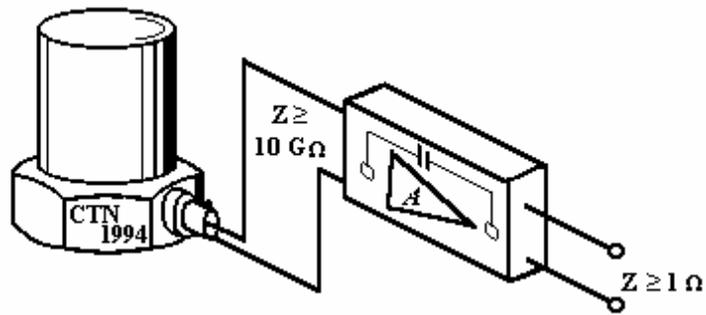


**Fig. 3.20 Posición del preamplificador en sistemas de medición**

Él va conectado entre el sensor y la instrumentación para indicación, señalización, registro o análisis de datos (ver Fig. 3.20).

Su función principal es la de amplificar la señal de salida del sensor, que por lo general es muy débil, hasta un valor necesario del procesamiento posterior. Conectar directamente un acelerómetro al instrumento de indicación, de inclusive, muy alta impedancia de entrada, reduce grandemente la sensibilidad de este instrumento primario, así como limita su intervalo de frecuencias de operación.

El amplificador convierte la baja impedancia de la instrumentación de medición en una alta impedancia, que ve el sensor a la entrada del amplificador, así como transforma la alta impedancia del sensor en baja impedancia, que observa la instrumentación a la salida del amplificador. Esta es la función de acoplamiento. En breves palabras; el amplificador le entrega energía a la señal que recibe, aumentándola y, devolviéndola a baja impedancia.



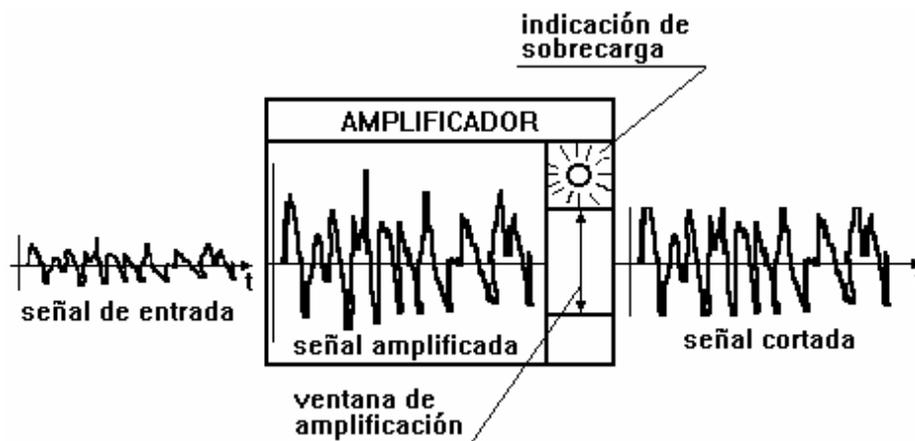
**Fig. 3.21 Función de acoplamiento del amplificador**

Cuanto mayor sea la  $Z_{ent}$  del amplificador, menor deformación de la señal que genera el acelerómetro, ya que se tiene menor consumo de la carga generada por el sensor. Al crecer  $Z_{ent}$  se reduce la corriente del lazo sensor - amplificador. Ello implica un menor cambio  $\Delta q$  ( $\Delta q = I \cdot \Delta \tau$ ).

Existen amplificadores que adicionalmente realizan la función de integradores de la señal que amplifican, por lo que a la salida, además de la señal de aceleración, ofrecen la de velocidad y de desplazamiento en los terminales correspondientes.

Otra función agregada es la de filtraje. Poseen filtros para cortar las altas y bajas frecuencias de respuesta del instrumento primario. Mediante el filtraje se elimina la interferencia producto del ruido electrónico o señales externas inducidas, posibilitando al usuario limitar la información recibida al intervalo deseado.

La función de indicación de sobrecarga es opcional en los amplificadores. Esta acostumbra a realizarse de forma lumínica.



**Fig. 3.22 Fenómeno de corte de la señal en el amplificador**

Como se aprecia en la Fig. 3.22 el factor de amplificación seleccionado produce corte en la señal de salida. El corte constituye una sobrecarga del instrumento. En ocasiones la sobrecarga se produce, debido a que la señal útil de entrada viene sumada a otra de corriente directa. Para eliminar este evento basta con un adecuado filtraje.

Existen dos tipos de amplificadores que pueden ser utilizados con los sensores piezoeléctricos. Frecuentemente se prefiere el amplificador de carga, al de voltaje. La causa radica en, que al utilizar el primero es posible emplear, indistintamente, cables de conexión largos o cortos para el acelerómetro, sin que se altere la sensibilidad a la salida del sistema (extremos de baja impedancia del amplificador). Por otro lado, cuando se utiliza el amplificador de voltaje, el hecho de cambiar la longitud de los cables, o inclusive, su impedancia para la misma longitud (cambio del tipo de cable) implica la necesidad de recalibrar la sensibilidad del sistema. A continuación se hace una demostración resumida de los elementos arriba expuestos.

a) Caso de los amplificadores de carga.

Los amplificadores de carga son convertidores de la carga  $q$ , generada por el sensor, en variaciones de voltaje. Del acelerómetro es conocido ya, que es una fuente alterna de cargas electrostática con alta impedancia interna. Este puede ser representado por el circuito de corriente de carga equivalente, mostrado en la Fig. 3.23; donde la carga eléctrica  $q_{ac}$  generada, es proporcional a

la aceleración  $\ddot{x}$ . La capacitancia eléctrica de las pastillas piezoeléctricas, así como su resistencia interna se representan por  $C_{ac}$  y  $R_{ac}$ , respectivamente.

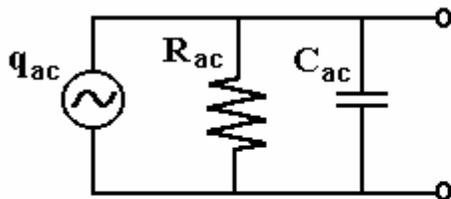


Fig. 3.23 Circuito equivalente de corriente de carga del acelerómetro

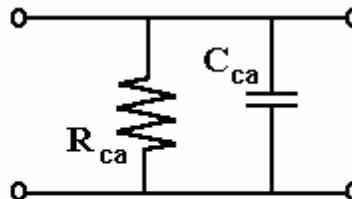


Fig. 3.24 Representación de los cables de conexión con parámetros concentrados

Los cables de conexión entre el sensor y el amplificador de carga suelen representarse de forma concentrada, según se muestra en la Fig. 3.24 ; donde  $R_{ca}$  y  $C_{ca}$ , son la resistencia y la capacitancia del cable, respectivamente, y medidas desde uno de sus extremos. Por cuanto se considera que se trabaja a frecuencias relativamente pequeñas (caso de las vibraciones mecánicas), la inductancia  $L$  de los conductores se desprecia.

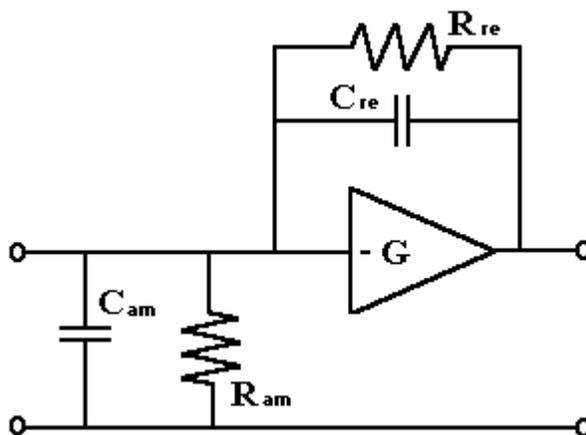
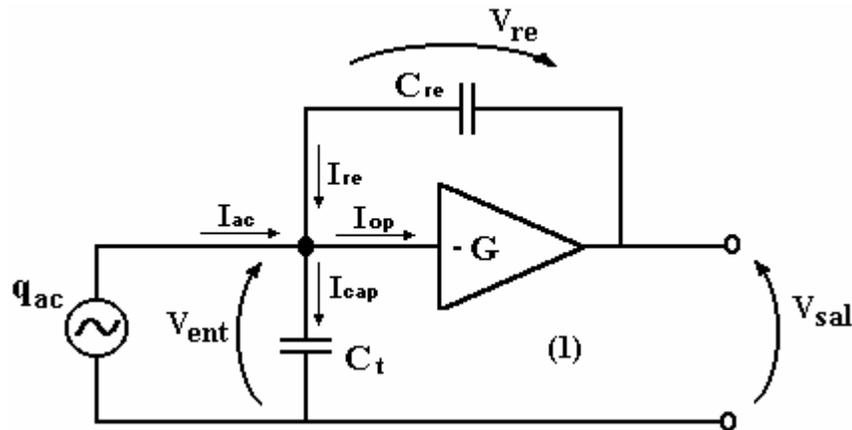


Fig. 3.25 Circuito equivalente del amplificador de carga

En la Fig. 3.25 se presenta el esquema equivalente de un amplificador de carga; donde  $R_{am}$  y  $C_{am}$ , son la resistencia y la capacitancia a la entrada del amplificador de carga; así como  $R_{re}$  y  $C_{re}$ , son la resistencia y la capacitancia del circuito de realimentación.  $G$  es la ganancia del amplificador operacional.

Si a continuación conectamos formalmente los esquemas equivalentes del acelerómetro, del cable y del amplificador, representados en las Fig. 3.23 a la 3.25, y teniendo en cuenta, que normalmente las resistencias  $R_{ac}$ ,  $R_{ca}$ ,  $R_{am}$ , y  $R_{re}$  son muy grandes, por lo que podemos considerarlas como circuitos abiertos, entonces, el esquema resultante es el circuito equivalente simplificado del acelerómetro conectado al preamplificador de carga (ver Fig. 3.26).



**Fig. 3.26 Conexión acelerómetro - amplificador de carga; circuito equivalente simplificado.**

Las corrientes  $I_{ac}$ ,  $I_{re}$ ,  $I_{cap}$  e  $I_{op}$  que llegan y salen del nodo son las del acelerómetro, de la realimentación, las capacitivas externas y la del amplificador operacional, respectivamente. Debe tenerse en cuenta, que  $C_t = C_{ac} + C_{ca} + C_{am}$ . Es decir, es la capacitancia total externa al circuito del amplificador por donde circula la corriente capacitiva  $I_{cap}$ .

La corriente de entrada de un amplificador operacional ideal es igual a cero. Por tanto, si sumamos las corrientes que llegan y salen del nodo (ver Fig. 3.26) y, considerando al amplificador, como ideal queda:

$$I_{ac} + I_{re} - I_{cap} = I_{op} = 0 \quad (3-34)$$

Busquemos, entonces, a partir de la teoría de la electricidad, la definición de estas corrientes en función de otros parámetros del circuito. Para la corriente de carga del acelerómetro,

$$I_{ac} = \frac{dq_{ac}}{dt} \quad (3-35)$$

la corriente capacitiva será:

$$I_{\text{cap}} = C_t \frac{dV_{\text{ent}}}{dt} \quad (3-36)$$

Como todo amplificador la ganancia se define, como la relación de los voltajes de salida y entrada, así;

$$\frac{V_{\text{sal}}}{V_{\text{ent}}} = -G \quad (3-37)$$

sustituyendo la Ec. (3-37) en (3-36), se obtiene:

$$I_{\text{cap}} = -\frac{C_t}{G} \cdot \frac{dV_{\text{sal}}}{dt} \quad (3-38)$$

la corriente por el lazo de realimentación es:

$$I_{\text{re}} = C_{\text{re}} \frac{dV_{\text{re}}}{dt} \quad (3-39)$$

Sumando los voltajes en la malla (1), se tiene,

$$\begin{aligned} V_{\text{ent}} + V_{\text{re}} &= V_{\text{sal}} \\ V_{\text{re}} &= V_{\text{sal}} - V_{\text{ent}} \end{aligned} \quad (3-40)$$

sustituyendo la Ec. (3-37) en la (3-40), queda:

$$V_{\text{re}} = V_{\text{sal}} + \frac{V_{\text{sal}}}{G} \quad (3-41)$$

y a continuación el valor de  $V_{\text{re}}$  en la Ec. (3-39),

$$I_{\text{re}} = C_{\text{re}} \frac{dV_{\text{sal}}}{dt} + \frac{C_{\text{re}}}{G} \cdot \frac{dV_{\text{sal}}}{dt}$$

agrupando,

$$I_{\text{re}} = C_{\text{re}} \left( 1 + \frac{1}{G} \right) \frac{dV_{\text{sal}}}{dt} \quad (3-42)$$

Finalmente, incorporando las Ecs. (3-35), (3-38) y (3-42) en (3-34) y; expresando la variación de la carga del acelerómetro en función de la variación del voltaje de salida, resulta:

$$\frac{dq_{\text{ac}}}{dt} = -\frac{C_t}{G} \cdot \frac{dV_{\text{sal}}}{dt} - C_{\text{re}} \left( 1 - \frac{1}{G} \right) \frac{dV_{\text{sal}}}{dt} \quad (3-43)$$

La Ec. (3-43) se presenta como dos funciones respecto a la variable independiente, que es el tiempo; por tanto, ella constituye un sistema de dos ecuaciones de primer orden igualadas y de la cual se obtiene la primera integral del tipo;

$$dq_{ac} = K \cdot dV_{sal} \quad (3-44)$$

resultando ser una ecuación de variables separadas y donde,

$$K = - \left[ \frac{C_t}{G} + C_{re} \left( 1 + \frac{1}{G} \right) \right]$$

Integrando en ambos lados la Ec. (3-44), se obtiene la relación entre las dos funciones  $q_{ac}$  y  $V_{sal}$ ,

$$q_{ac} = - \left[ \frac{C_t}{G} + C_{re} \left( 1 + \frac{1}{G} \right) \right] \cdot V_{sal} \quad (3-45)$$

Al analizar nuestro resultado se tiene que considerar, que la ganancia  $G$  es de un quinto orden, aproximadamente, y de la Ec. (3-37) se aprecia que,

$$V_{ent} \approx 0$$

consecuentemente, esto significa que las resistencias de entrada (por ejemplo, la longitudinal de los cables, en ohm/m) no tienen efecto en el voltaje de salida. De la Ec. (3-45), siendo  $G$  muy grande, la relación entre  $q_{ac}$  y  $V_{sal}$  toman la forma,

$$V_{sal} = - \frac{1}{C_{re}} q_{ac} \quad (3-46)$$

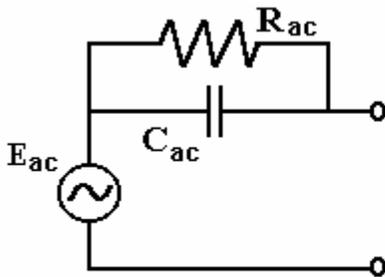
De ella se aprecia, que el  $V_{sal} \propto q_{ac}$  y por tanto a  $\frac{1}{C_{re}}$ . A medida que se reduce  $C_{re}$  crece  $V_{sal}$ , o sea, la ganancia del amplificador de carga está determinada por  $C_{re}$ , y la capacitancia total externa  $C_t$  no influye en el voltaje de salida.

Para la práctica, este resultado es muy conveniente tenerlo en cuenta, puesto que al medir conectando el acelerómetro al amplificador de carga no importa unos cables más largos o más cortos, hasta cierto límite. Por ejemplo, no se produce distorsión por amplitud (no disminuye), para señales complejas de hasta 10 kHz, cuando se mide con cables de  $\sim 200$  m, de 100 nF/m y  $C_t \approx 20$  nF ; con  $G$  y  $C_{re}$  de valores comerciales estandarizados.

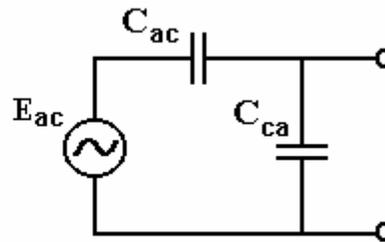
Pero sí es de vital importancia, que  $R_{ac}$  y  $R_{ca}$  no se reduzcan. La  $R_{am}$  es una resistencia especial de muy alto ohmeaje. A la menor fuga de la corriente de carga generada por el acelerómetro se pierde la señal a la entrada del amplificador de carga. Por lo regular, el fallo es en los cables. Cuando  $R_{ca}$  ligeramente disminuye por fugas, ese cable conector puede tener otros usos pero, no ya para unir al amplificador con su sensor.

b) Caso del amplificador de voltaje.

Para poder representar la conexión del acelerómetro con el amplificador de voltaje es conveniente utilizar su circuito equivalente de voltaje (ver Fig. 3.27),



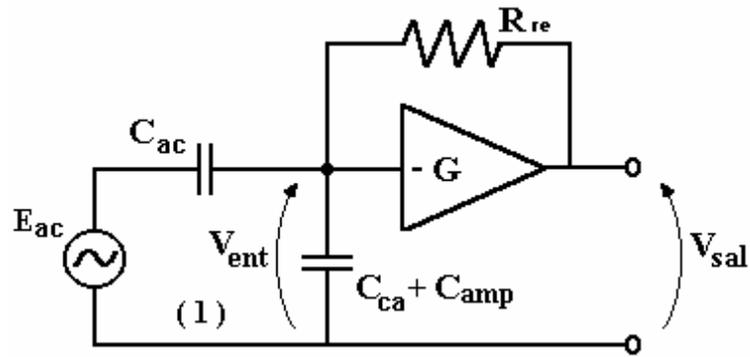
**Fig. 3.27** Circuito equivalente de voltaje del acelerómetro.



**Fig. 3.28** Circuito equiv. del acel. con su cable de conexión.

donde  $E_{ac} = q_{ac} / C_{ac}$ , si consideramos que la resistencia  $R_{ac}$ , como se planteó anteriormente, es un circuito abierto. En la Fig. 3.28 se muestra el circuito equivalente de voltaje del acelerómetro con su cable de conexión.

El esquema del amplificador de voltaje, en su circuito equivalente simplificado, conectado con el circuito equivalente del acelerómetro con su cable de conexión, se presenta en la Fig. 3.29.



**Fig. 3.29 Circuito equivalente de voltaje, acelerómetro - amplificador**

Aplicando el principio del divisor de voltaje en la malla (1), el voltaje  $V_{ent}$  se puede escribir como:

$$V_{ent} = \frac{E_{ac} \cdot C_{ac}}{C_{ac} + C_{ca} + C_{amp}} \quad (3-47)$$

La equivalencia entre  $E_{ac}$  y  $q_{ac}$  ya está dada, siendo  $E_{ac}$  el voltaje de circuito abierto del acelerómetro. La Ec. (3-47) es posible transformar a:

$$V_{ent} = \frac{q_{ac}}{C_{ac} + C_{ca} + C_{amp}} \quad (3-48)$$

Por cuanto pasar, del  $V_{ent}$  al  $V_{sal}$  solo equivale a multiplicar la Ec. (3-48) por  $-G$ , el análisis posterior, a través del  $V_{sal}$ , no es necesario hacer. De esta manera, si se multiplica por el inverso de la gravedad ambos miembros de la Ec. (3-48), queda:

$$\frac{V_{ent}}{g} = \frac{q_{ac} / g}{C_{ac} + C_{ca} + C_{amp}} \quad (3-49)$$

donde ahora,  $\frac{V_{ent}}{g} = S_v$  y  $\frac{q_{ac}}{g} = S_q$ , es decir:

$$S_v = \frac{S_q}{C_{ac} + C_{ca} + C_{amp}} \quad (3-50)$$

La Ec. (3-50) puede considerarse como una demostración de su semejanza la (3-28). Es evidente, entonces, que tanto la sensibilidad, como el voltaje, en el caso de utilizar este tipo de amplificador asociado a su acelerómetro, están bajo la influencia de la capacitancia de los cables de conexión. A

medida que crece la longitud de los cables, disminuye la sensibilidad a la entrada del amplificador y, por tanto, el voltaje de salida.  $S_q$  y  $C_{ac}$  son propiedades físicas y por ende constantes del acelerómetro.

Puede demostrarse, que la sensibilidad de voltaje a la salida del amplificador es;

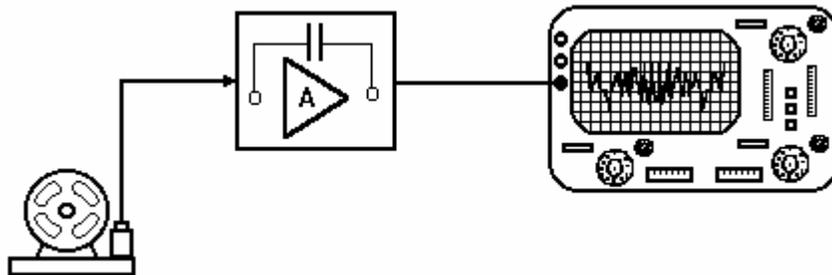
$$S_v^{amp} = G \cdot S_v^{c.ab.} \cdot \frac{C_{ac}}{C_{ac} + C_{ca} + C_{amp}} \quad (3-51)$$

donde  $S_v^{c.ab.}$ , es la sensibilidad de voltaje de circuito abierto, o sea, del sensor sin carga.

Con esto se concluye lo anteriormente expuesto. Un acelerómetro debe ser usado solamente, con el cable mediante el cual fue calibrado en el laboratorio correspondiente, si de lo que se dispone es de su amplificador y de la sensibilidad de voltaje.

### 3.2.2 Uso del osciloscopio catódico y el registro en banda magnética.

La gran ventaja que se deriva de la utilización del osciloscopio de rayos catódicos, consiste en la presentación visual e, inclusive, la grabación de fenómenos dinámicos mediante un haz de electrones cuya inercia, prácticamente despreciable, no impone o condiciona límite a las respuestas de más alta frecuencia encontradas en las vibraciones mecánicas.



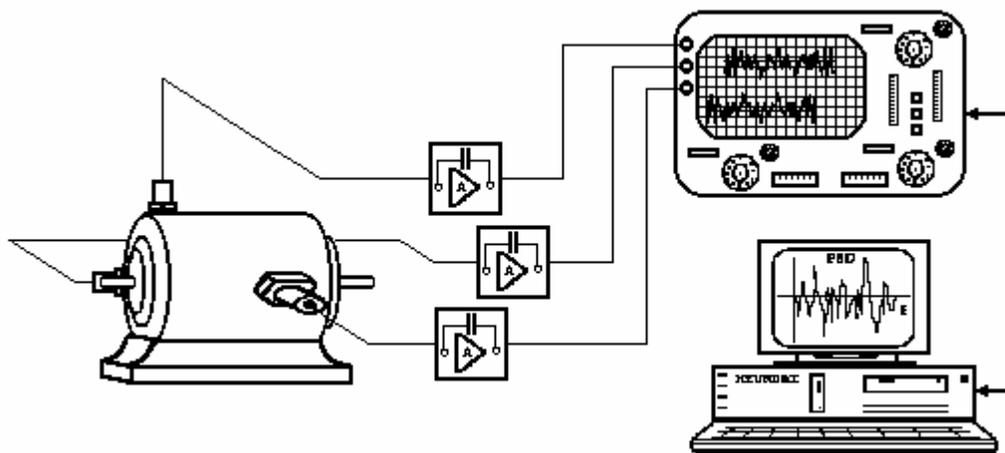
**Fig. 3.30 Empleo elemental del osciloscopio en la medición.**

Cuando se utiliza el osciloscopio de rayos catódicos, en la forma presentada en la Fig. 3.30 son posible realizar mediciones de frecuencia, corrimientos de fase y retardo temporal mediante la comparación de los espectros estacionarios de la pantalla con los patrones de Lissajous.

Los osciloscopios denominados comúnmente, como “osciloscopios con memoria”, pueden utilizarse en muchas operaciones, entre las que se tienen:

- captura de una porción de la historia temporal de un fenómeno de vibración, que no se repite, para analizarlo detalladamente;
- observar los cambios y el carácter de una señal de onda temporal;
- comparación de dos o más señales;
- registro automático de desviación brusca de señales (o fenómeno transitorio) en intervalos de tiempo seleccionados;
- captura de variaciones rápidas en señales lentas.

Los osciloscopios pueden tener los tipos de almacenamiento de información: analógico y digital. El analógico captura y retiene las señales por sí mismo mientras, que el digital almacena datos digitales que representan la forma de onda (de la señal) en una memoria.



**Fig. 3.31 Esquema general de conexión del osciloscopio digital**

Actualmente se fabrican modelos de osciloscopios, que son auxiliares de las microcomputadoras en el análisis de señales, a la vez, que muy flexibles en su sistema de adquisición de información.

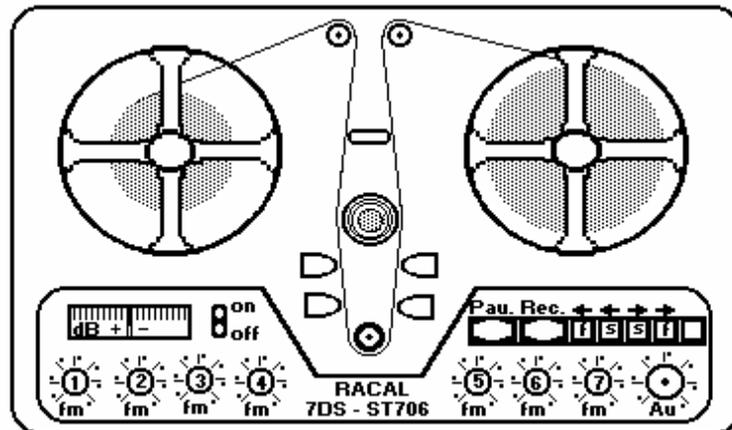
Esto permite realizar rápida verificación del sistema de medición en los casos de monitoreo permanente.

En la Fig. 3.31 se muestra el esquema general de conexión del osciloscopio digital en el sistema de medición. Para este caso el osciloscopio permite muchas de las aplicaciones antes mencionadas.

Registro en banda magnética. El uso de la grabadora de cinta está determinado por algunos beneficios particulares, como pueden ser:

- almacenamiento de la información en forma analógica para procesamiento posterior;
- reproducción del registro en cualquier momento y cuantas veces se requiera, sin deterioro de la banda magnética ni de la información;
- contracción o expansión del tiempo, lo cual permite el traslado de frecuencia en el espectro. Esto se logra grabando a velocidad distinta de aquella, a la que se reproduce.

Las grabadoras de bandas magnéticas por lo general trabajan en modo de grabación directa (GD) o grabación en frecuencia modulada (FM). Las grabadoras de propósito científico emplean ambas opciones mediante selección.



**Fig. 3.32 Esquema de recorrido de cinta, grabadora 7DS modelo ST706 Racal Recorders Ltd.**

La grabación directa presenta malas características de respuesta a bajas frecuencias. La cabeza de grabación (ver Fig. 3.32), magnetiza la cinta con una intensidad proporcional a la amplitud de la

señal. La cabeza de reproducción captura una señal proporcional a la razón de cambio del flujo magnético y por tanto proporcional a la derivada temporal de la señal original. Esto implica, que para tener iguales señales a la entrada y a la salida se requiere un amplificador de integración en el circuito de reproducción. Las señales de CD y de baja frecuencia no son captadas a un nivel, lo suficientemente elevado, que pueda diferenciarse de las señales de ruido eléctrico parásito de la propia cinta.

En el modo de grabación GD la señal a grabar, o señal dato, se mezcla con otra de polarización (o de premagnetización) de alta frecuencia, antes de ser grabada en la cinta magnética. La corriente de polarización permite la grabación de la señal dato dentro de la región lineal de la curva de magnetización de la cinta magnética. En dependencia de la velocidad de la cinta, el ruido parásito limita la frecuencia permisible (sin distorsión aceptable) de la señal grabada a valores por encima de 100 a 250 Hz.

En las Tablas 3.2 y 3.3 se presentan los datos de los anchos de bandas permisibles de la señal a grabar en los casos de grabación GD y FM de la grabadora 7DS modelo ST706 de la Racal Recorders.

**Tabla 3.2 Anchos de banda de grabaciones GD y FM de la grab. Racal 7DS.**

<b>Velocidad de la cinta pulg/s (cm/s)</b>	<b>GD Ancho de banda ± 3 dB</b>	<b>FM Ancho de banda * (WB.1) ± 0,5 dB</b>
15/16 (2,38)	100 Hz - 4,75 kHz	0 - 625 Hz
17/8 (4,76)	100 Hz - 9,5 kHz	0 - 1250 Hz
3 ¾ (9,52)	100 Hz - 19 kHz	0 - 2500 Hz
7½ (19,05)	100 Hz - 37 kHz	0 - 5000 Hz
15 (38,1)	100 Hz - 75 kHz	0 - 10 000 Hz
30 (76,2)	200 Hz - 150 kHz	0 - 20 000 Hz
60 (152,4)	300 Hz - 300 kHz	0 - 40 000 Hz

\* con filtro tipo Chebychev.

En el caso de la grabación en FM, la señal dato es utilizada primeramente para modular (en frecuencia) una portadora de alta frecuencia y, de esta manera, esta señal ya modulada es entonces grabada en la cinta magnética. Esto prácticamente elimina el efecto de la influencia magnética instantánea del recubrimiento de óxido; además permite las grabaciones desde las bajas frecuencias, incluyendo la señal de CD; ofrece mejores relaciones señal - ruido; menores distorsiones de fases y en general se obtiene mejor precisión que en el modo de grabación GD, para señales portadoras de información de vibraciones mecánicas (gran información en las zonas de bajas frecuencias).

**Tabla 3.3 Relación señal ruido de GD y FM de la grab. Racal 7DS.**

<b>Velocidad de la cinta pulg./s</b>	<b>Relac. señal-ruido para GD (dB)</b>	<b>Relac. señal-ruido para FM (dB)</b>
15/16	36	44
17/8	38	46
3 ¾	38	48
7 ½	38	48
15	40	50
30	40	50
60	40	50

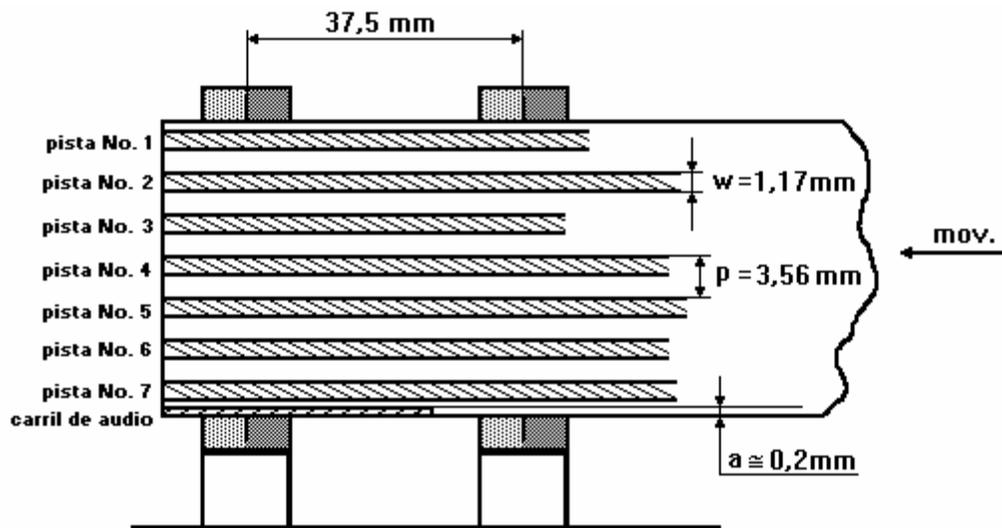
Por lo general las cualidades y el comportamiento prolongado de este tipo de equipamiento dependen de la calidad de las bandas magnéticas. El espesor de la cinta debe oscilar de 18 hasta 35  $\mu\text{m}$ . Las cintas estándar de 50  $\mu\text{m}$  de espesor requieren tensiones mucho mayores para poder ser usadas en las grabadoras de propósitos científicos, así como alineamientos especiales. Las cintas magnéticas convencionales tienen muy baja conductividad lo que puede provocar descargas electrostáticas que afecten el sistema lógico de la grabadora.

Estas grabadoras se caracterizan, también, por poseer más de un canal de grabación. Esta facilidad es muy conveniente en los estudios de fenómenos de coherencia en señales del mismo género, como de magnitudes físicas diferentes. Las grabadoras 7DS acomodan 7 canales de datos en ½ pulgada (12,7 mm) de anchura de la cinta. En la Fig. 3.33 se muestran las pistas de grabación y el carril de audio.

El carril de audio es utilizado por el operador para identificar, mediante la grabación de su voz, una información siempre útil como:

- punto de inicio y fin de grabación de señales;
- sentido de movimiento de la cinta e identificación de los canales de grabación;
- condiciones físicas particulares durante el proceso de grabación y;

- cualquier otro comentario surgido durante el proceso de captura de la información.



**Fig. 3.33 Distribución de las pistas en la grabadora 7DS**

La forma de conexión de la grabadora para la toma de la información es la convencional. Se emplea un amplificador por canal en el caso de los acelerómetros y, en dependencia del nivel de señal, se emplearán o no amplificadores para recibir la información de los puntos de muestreo de presión, temperatura y otros parámetros.

### **3.2.3 El conversor análogo - digital.** (con la colaboración del Ing. Rafael Macías)

Cuando se requiere utilizar el equipamiento digital (como en esquemas vistos anteriormente) para el procesamiento de señales experimentales, como por ejemplo las microcomputadoras, surgen los requerimientos de muestreo y codificación de la señal analógica generada por el sensor y amplificada por el preamplificador, o también, la obtenida del soporte magnético.

La conversión de la señal a digital debe realizarse tan cerca de la instrumentación analógica, como sea posible para minimizar la alteración de la información debido a ruido, distorsiones u otros tipos de imprecisiones del equipamiento analógico.

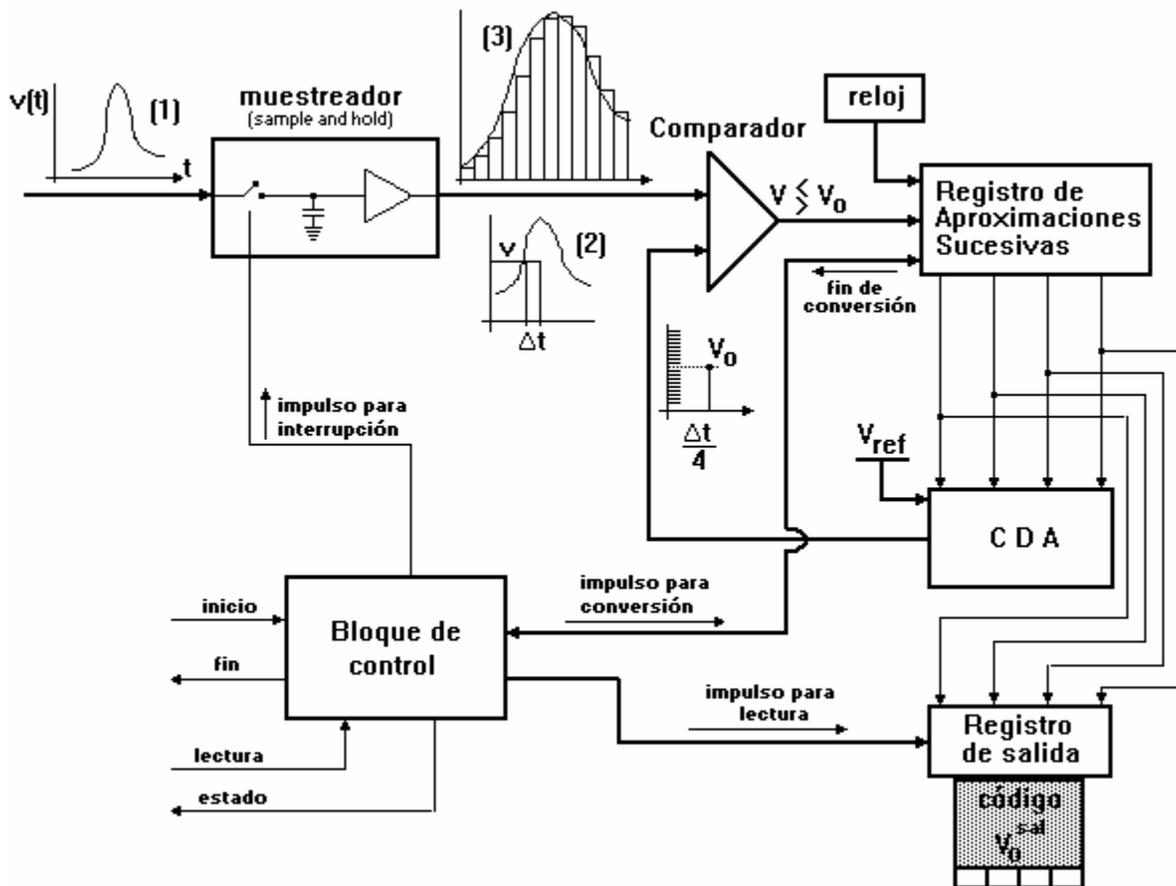
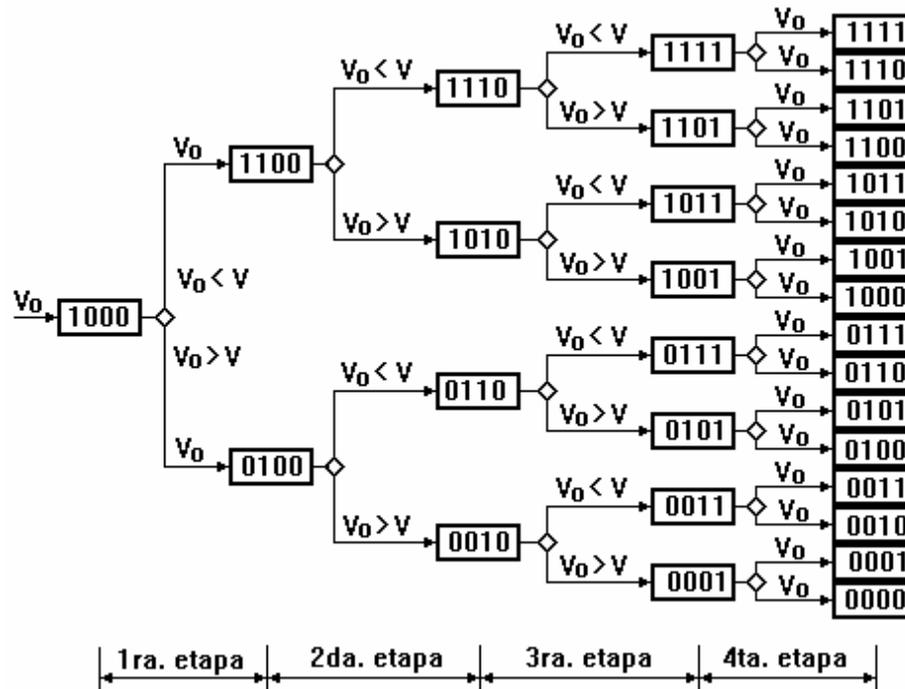


Fig. 3.34 Esquema de trabajo de un CAD de 4 bits

En la práctica existen diferentes tipos de convertidores analógico - digitales (CAD), en dependencia de sus campos de aplicación. Cuando las exigencias son de alta velocidad y resolución, como en la medición de las vibraciones mecánicas, se emplean los convertidores de aproximaciones sucesivas, que presentan tiempos de conversión desde 1 a 50  $\mu$ s con resolución de 8 a 12 bits.

La conversión analógico - digital encierra dos procesos fundamentales que son: el muestreo y la codificación; los que pueden concebirse como se muestra en la Fig. 3.34 en forma de bloques. Para lograr una idea general sobre el proceso de trabajo del CAD, se ha incorporado el bloque de muestreo y retención ('sample and hold'). De esta manera, el flujo principal de información se produce de izquierda a derecha con la señal analógica  $v(t)$  en la entrada y su homóloga digital  $V_0^{sal}$  a la salida.

La señal analógica de entrada (1) es muestreada por el 'sample and hold', mediante la captura de un cierto valor instantáneo de ella que se almacena en el capacitor. Esta cantidad es transmitida hacia el comparador como se muestra en (2). El proceso continuo de muestreo y retención se presenta en (3). El bloque de control envía los pulsos de apertura y cierre al interruptor del muestreador. La posición interrumpida equivale a un valor de voltaje  $V$  constante a la entrada del comparador.



**Fig. 3.35 Proceso de trabajo del comparador y el RAS.**

Este tipo de convertidor tiene una estructura de lazo formada por el comparador, el registro de aproximaciones sucesivas (RAS) y el convertidor digital - analógico (CDA). Su principio de funcionamiento es de la forma siguiente. Supongamos que el intervalo de trabajo del CAD es de 0 - 10 volts; cuando el bloque de control recibe la señal de inicio, envía un impulso de continuidad al muestreador para que se cargue el capacitor (fracción de tiempo muy pequeña). Inmediatamente después emite el impulso correspondiente para conversión hacia el RAS, al mismo tiempo que el de interrupción al muestreador, y este inicializa el CDA con la combinación 1000, cuando el convertidor es de 4 bits como en el presente caso. De hecho se ha establecido la comparación inicial con la mitad de la escala del CAD, ya que el valor analógico  $V_0$  entregado por el CDA es de 5,0 volts.

El comparador establece la desigualdad analógica  $V \neq V_0$  y en dependencia de como ella sea, el RAS adiciona un  $\underline{1}$  ( $V_0 < V$ ), o incorpora un  $\underline{0}$  ( $V_0 > V$ ) en el bit más significativo (en lo adelante MSB), al mismo tiempo que incorpora un  $\underline{1}$  en el segundo dígito; alcanzándose el fin de la primera etapa o ciclo interno. Esto puede observarse en la Fig. 3.35 Las cantidades digitales 1100 ó 0100, según el caso, se entregan nuevamente al CDA para comenzar el segundo lazo. Este proceso se repite hasta culminar la cuarta etapa, en la que se define el dígito binario (bit) menos significativo (en lo adelante LSB).

Finalizada la conversión del valor de  $V$  en su homólogo digital  $V_0^{\text{sal}}$ , el RAS envía un impulso de fin de conversión, indicándose al bloque de control que está listo para que se produzca la lectura a través del registro de salida.

Puede observarse que el tiempo de conversión es independiente del valor analógico de la señal de entrada, sin embargo, es función del número de bits del CAD. Si el CAD fuese de tres etapas (3 bits), su tiempo de conversión sería de las  $\frac{3}{4}$  partes del que aquí se trata, pero por otro lado su resolución se verá reducida.

La resolución  $R$  de un CAD es:

$$R = \frac{\text{intervalo} \cdot \text{en} \cdot \text{volts}}{2^n}$$

donde  $n$ , es el número de bits. Si  $n = 3$  y el intervalo es el anteriormente indicado, entonces  $R = 1,25$ ; que representa una resolución inferior al  $0,625$  para el caso de 4 bits. Es decir, la cantidad binaria 0000 equivale a magnitudes de  $V_0^{\text{sal}}$  que oscilan en  $0 \leq V_0^{\text{sal}} < 0,625$ ; la cantidad 0001 equivale a  $0,625 \leq V_0^{\text{sal}} < 1,25$  y así sucesivamente, hasta la cantidad binaria 1111 que equivale a  $9,375 \leq V_0^{\text{sal}} < 10$ . Los extremos de cada intervalo pueden cambiarse, de tal manera que se inicie con  $0 < V_0^{\text{sal}} \leq 0,625$  y se termine como  $9,375 < V_0^{\text{sal}} \leq 10$ . Un CAD de 10 bits tendría una resolución de  $R = 9,765 \cdot 10^{-3}$ . De esta manera, si las variaciones de la señal analógica a muestrear son rápidas, se requiere llegar a un compromiso entre la resolución y el tiempo útil de conversión.

La principal condición que se impone a cualquier procedimiento de muestreo es la de no perder o deteriorar la información contenida en la señal analógica. Con relación a esto, se establecen algunos requerimientos como el teorema de muestreo y la selección del número adecuado de muestras estadísticamente independientes.

### **3.3 Sistemas primarios de adquisición de la información.**

La instrumentación empleada para aplicar el mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas puede dividirse en varios grupos dentro del mismo sistema de adquisición.

Se entiende por sistema primario de adquisición de la información (de medición), en esta temática, a aquella instrumentación empleada para aplicar el mantenimiento predictivo por vibraciones mecánicas de forma no automatizada. De esta manera, la instrumentación de los sistemas primarios puede dividirse en tres grupos principales, que serán tratados en los subepígrafes posteriores.

#### **3.3.1 El sensor y el vibrómetro.**

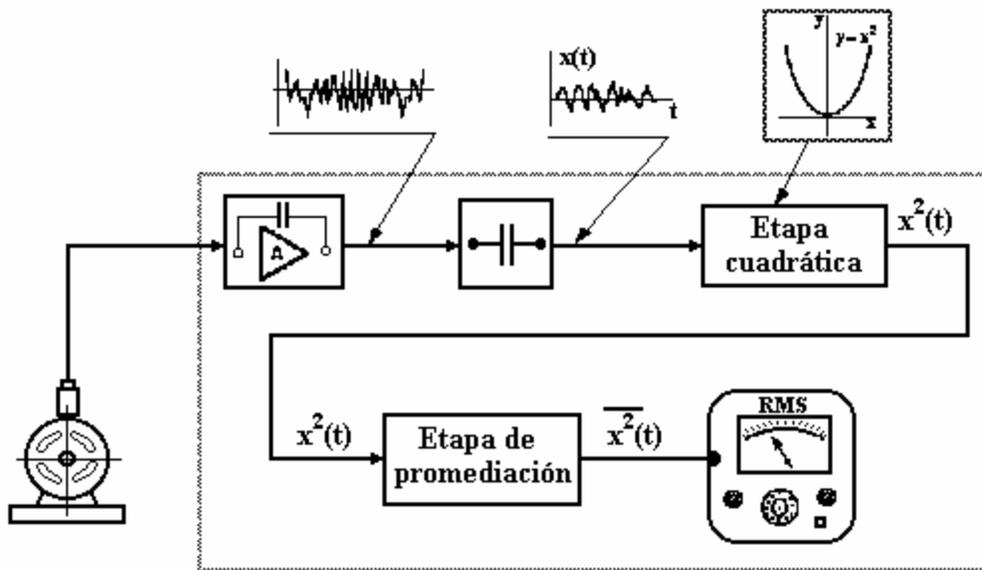
Se denomina vibrómetro a aquel instrumento secundario, que acoplado con su sensor es capaz de indicar:

1. el nivel efectivo (RMS) de la vibración,
2. el valor pico de la vibración,
3. el valor pico - pico de la vibración.

Esta indicación es realizada para un determinado intervalo de tiempo de la medición, así como para una banda de frecuencia específica, que puede ser, por ejemplo, de 10 a 1000 Hz. Como se ha establecido en epígrafes anteriores, el intervalo de frecuencias impuesto (los cortes) sirve para reducir el ruido de alta y baja frecuencias no deseable en la medición.

En la Fig. 3.36 se muestra la medición de una máquina mediante el acelerómetro acoplado al vibrómetro y donde este último se simboliza por etapas para su mejor descripción. Por lo general, el valor efectivo (o el valor pico) de la vibración es comparado con las cantidades previamente fijadas, como alerta o parada, correspondientes a la máquina rotatoria que se mide. A muchas otras conclusiones pueden arribarse de los datos obtenidos del vibrómetro, no obstante, a continuación sólo se hará referencia a su estructura.

Como puede apreciarse, el vibrómetro está constituido de diferentes pasos: amplificación, filtraje, potenciación cuadrática, promediación e indicación. Los vibrómetros pueden llegar a ofrecer muchas otras opciones, con la peculiaridad de encarecer más al instrumento. En el paso de indicación el instrumento puede venir calibrado en la magnitud requerida, como puede ser, en  $m/s$ ;  $m/s^2$ ; etc.



**Fig. 3.36 Esquema simplificado del vibrómetro en etapas**

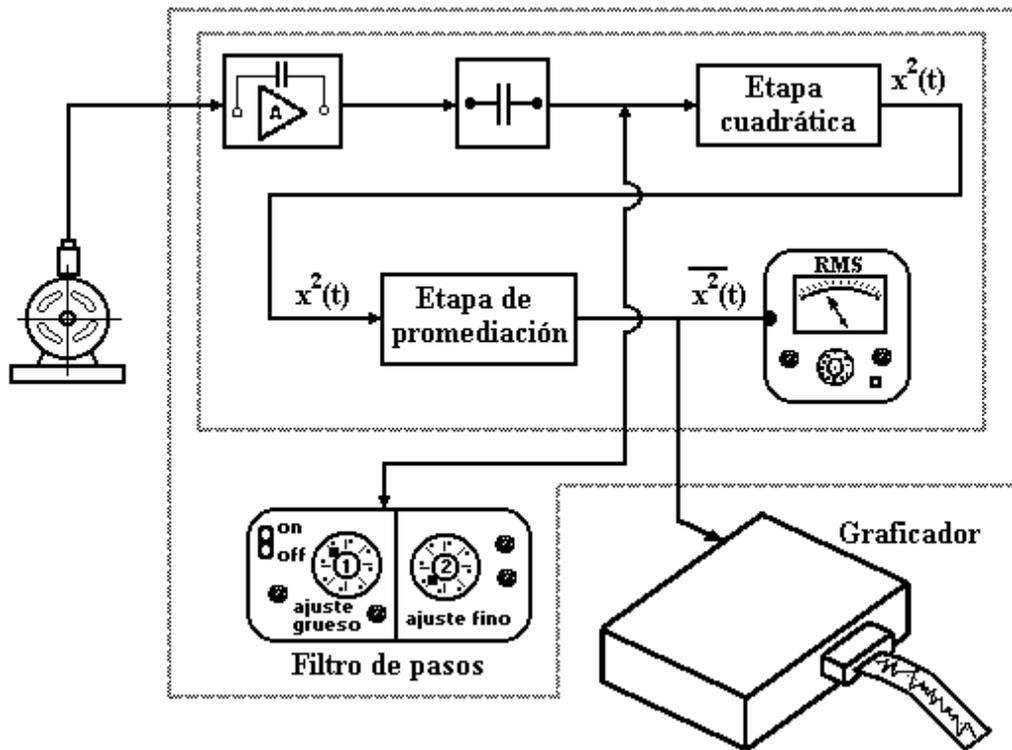
Para medir el valor RMS se necesita la operación de radicalización, la que se efectúa simplemente utilizando escalas no lineales del instrumento indicador. De lo contrario se realiza electrónicamente, mediante el circuito correspondiente. De igual manera, la etapa cuadrática puede desarrollarse con equipamiento de características parabólicas.

La etapa de promediación se ejecuta con la integración en el tiempo de la señal analógica. Existen varias formas de promediar las señales analógicas temporalmente, entre ellas: la integración de amplificadores operacionales, los diferentes tipos de circuitos RC pasivos de promediación exponencial.

La precisión de la medición, desde la posición  $x(t)$  hacia delante, depende de los errores que se introducen en cada etapa. La etapa cuadrática debe dar la mejor aproximación a la función parabólica y el tiempo de integración  $\tau = R \cdot C$  debe seleccionarse para la etapa de promediación, tal que, como mínimo sea igual al obtenido por la ecuación de error estándar  $\varepsilon = (\Delta F \cdot t)^{-1/2}$ ; donde  $\Delta F$ , es el ancho de banda total, ocupado por la señal que se registra (ruido blanco equivalente) y  $t$ , es el tiempo de promediación.

### **3.3.2 Sensor, Analizador de frecuencias y Graficador.**

Con este sistema se obtiene, en principio, el mismo resultado que con el vibrómetro. Esto se fundamenta en el ancho de banda seleccionado por el filtro de pasos, sobre el que más adelante se tratará. Sin embargo, el analizador de frecuencia, además, facilita la obtención del espectro de frecuencias tanto por indicación, como por registro en cinta de papel.



**Fig. 3.37 Esquema simplificado del analizador de frecuencias y graficador**

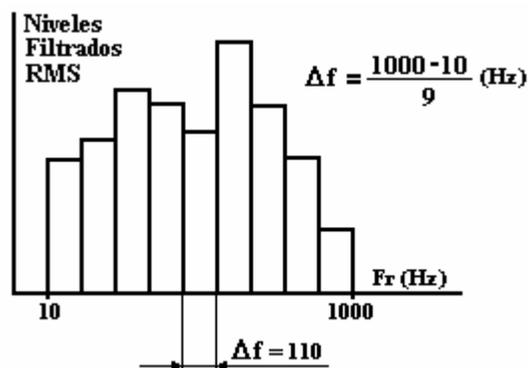
La particularidad del analizador de frecuencias (ver Fig. 3.37) con respecto al vibrómetro consiste en, que el primero incorpora un filtro de sintonía o de pasos, el cual solo permite pasar parte de la señal de vibración en una banda de frecuencias relativamente estrecha y se mueve (el filtro) a saltos iguales (en el caso del de pasos) por toda la banda de 10 a 1 000 Hz, por ejemplo, como los intervalos de medición indicados en páginas anteriores. El trabajo del filtro de sintonía es continuo.

Por otro lado, hay dos tipos básicos de filtros utilizados para el análisis en frecuencias de la señal de vibración. El filtro de Ancho de banda constante (ABC), por ejemplo, de 10 Hz y el filtro de Ancho de Banda Porcentualmente Constante ( ABPC), para el que su ancho de banda es un porcentaje constante de la frecuencia central localizada, por ejemplo, del 3 %. El filtro de ABPC es más conveniente utilizar cuando el ploteo contra frecuencia se realiza en escala logarítmica. Ello es ventajoso cuando debe ser cubierto un intervalo ancho de frecuencias. Cuando el ploteo en el dominio de la frecuencia es lineal, el filtro de ABC presenta su ventaja de resolución constante.

La selectividad del filtro está relacionada con la estrechez de la banda de frecuencias que permite pasar, y es quien gobierna la resolución del análisis de frecuencias a obtener. Así, mayor definición (o mayor detalle) se obtiene utilizando un filtro de ABPC del 5 %, que al ejecutar el análisis frecuencial con filtro del 20 %. La desventaja del análisis con el ancho de banda estrecho consiste en, que el tiempo requerido para obtener una exactitud cada vez mayor crece en la misma medida, que se estrecha el ancho de banda del filtro. Esto en ocasiones obliga a reconocer previamente las zonas de frecuencias de importancia para su estudio particular con filtros de alta resolución (muy selectivos). La mejor selección de ancho de banda para el análisis frecuencial, con el analizador de frecuencias, es aquella que ofrece la adecuada resolución sobre todo el intervalo de frecuencias y, además, posibilita efectuar el trabajo en el menor tiempo posible.

Los graficadores son convenientemente utilizados, cuando el ancho de banda del selector del filtro es suficientemente estrecho para obtener un registro continuo. En el caso contrario, el resultado obtenido, graficando los valores indicados por el instrumento para cada salto secuencial del filtro de ABC, puede ser de la forma indicada en la Fig. 3.38.

El sistema tratado permite realizar el análisis frecuencial de la máquina sometida a medición. Esto es, facilita la determinación del elemento de máquina fallado o con tendencia a fallo, si semejante espectro es obtenido en el transcurso del tiempo. Del resultado obtenido es posible tener dentro de un  $\Delta f$  de 110 Hz dos picos, correspondientes a dos elementos de máquinas independientes, entonces, resulta evidente estrechar el paso del filtro para lograr mejor resolución en dicha zona.



**Fig. 3.38 Gráfica del análisis frecuencial con filtro de ABC**

### **3.3.3 El Captador Digital de Información y la MCD.**

Cuando existe la posibilidad de realizar el procesamiento de la señal y el análisis y tratamiento de resultados de forma automatizada en la MCD, resulta conveniente disponer del captador digital de información. Un ejemplo de este tipo de equipo, representado en la Fig. 3.39, es útil para el monitoreo de varios puntos de medición en una misma máquina o estructura. El captador recibe la señal analógica de los sensores y las transforma a digital. Las señales digitalizadas pueden mantenerse en memoria o grabarse en soporte magnético. Las muestras de señales tomadas en las máquinas correspondientes, son trasladadas a la MCD por el analista en vibraciones mecánicas, quien con los software comerciales realiza: el filtraje de la señal temporal, la validación de la señal, su transformación al dominio de la frecuencia y obtiene todos los datos necesarios para los análisis de tendencia y otros tipos de procesamientos.

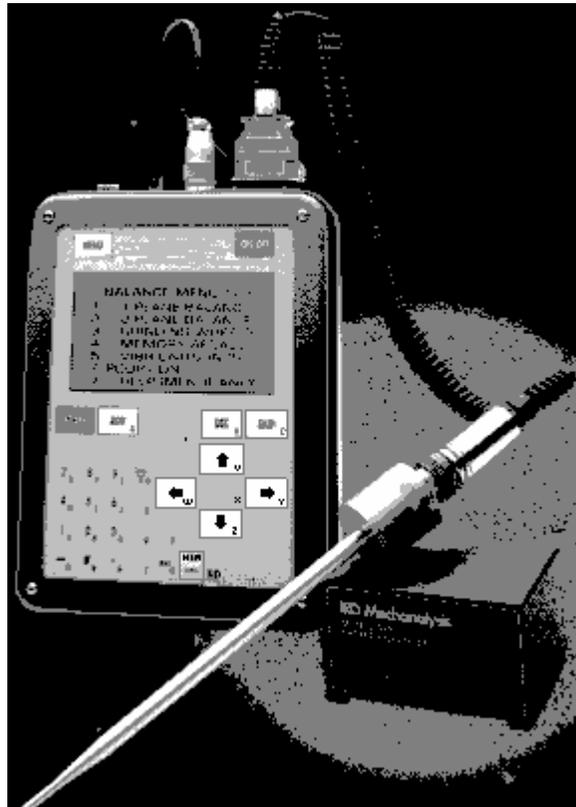
Los captadores digitales de información, suelen dividirse en: colectores de datos y colectores analizadores de información. Esta última variedad ha sido el resultado de un alto desarrollo tecnológico: de la incorporación de tecnología de avanzada en hardware a estos equipos portátiles, cada vez de menor tamaño y peso.



**Fig. 3.39** Colector de datos “Data PAC 1000” de IRD Mechanalysis

Los captadores digitales de información son sumamente fáciles de utilizar, puesto que la interfaz para el operador es gráfica, semejante al ambiente tipo Windows. Las baterías de Níquel - Cadmio le permiten trabajar durante una jornada de 8 horas ininterrumpidamente y, en caso de recambio, poseen circuito de retención de memoria (capacitor super), que ofrece hasta 15 minutos para la operación de cambio de baterías. El diseño ergonómico que han alcanzado facilita trabajarlos con una sola mano, sea zurdo o derecho el operario, gracias al estrecho perfil que poseen. El peso de estos instrumentos se encuentra en el entorno de los 1,5 a 2 kg. Sus pantallas de visualización han logrado alcanzar los 13 × 10 cm con resoluciones VGA de 640 × 480 puntos y funcionan de forma confiable a temperaturas desde 0° hasta los 60° C. Son claramente legibles, sin ajuste de contraste, hasta los 40° C y no presentan condensación en ambientes con humedad del 95 %.

Puede considerarse que sus capacidades de memoria son ilimitadas, pues se amplían mediante tarjetas (semejantes a las de crédito); montables y desmontables. Estas oscilan entre los 256 kb hasta 2 megabytes. Permiten resolución FFT de hasta 3 200 líneas. Son capaces de recolectar datos de baja frecuencia con gran precisión. Presentan resoluciones de 16 bits con intervalo dinámico mínimo de 85 dB.



**Fig. 3.40 Colector-Analizador de información “Fast Track” de IRD Mechanalysis**

En el proceso de recolección de datos permiten programar la ruta secuencial de medición, incluyendo el orden de puntos de medición para una misma máquina rotatoria y configurado el instrumento de esta manera, guardarla para ocasiones futuras. Esto es particularmente importante para realizar mediciones en áreas de riesgo, ya que el operador se limitará a aquellas máquinas establecidas en la configuración. Permiten, además, acoplárseles diversos tipos de sensores, incluyendo: la medición de temperatura, de presión y los sensores para las vibraciones mecánicas. En ellos es posible seleccionar la sensibilidad de entrada en intervalo de +10 a -10 voltios. Las salidas son por puerto RS - 232 de 115,2 kilobaudios.

Al ser usados los colectores de datos, en combinación con los software de mantenimiento predictivo en las MCD (previamente elaborados con estos propósitos), el sistema se convierte en el método de programación y ejecución de mantenimiento más útil para la industria, con el mínimo de equipamiento.

Una de las últimas versiones de colector - analizador de información de la IRD Mechanalysis es el modelo FAST TRACK (ver Fig. 3.40) el que, además, de los datos generales arriba mencionados posee las características y funciones siguientes:

- Capacidad de memoria de 768 kb, sin incorporar tarjetas.
- Mide los datos de velocidad, aceleración, desplazamiento y energía de impulsos con un solo sensor.
- Permite registrar seis bandas de frecuencias programables, para la detección anticipada de problemas específicos de las máquinas.
- Visualiza hasta 100 rutas codificadas de inspección, definidas por el usuario.
- Realiza función de libreta de notas. Este aspecto es sumamente importante, pues agiliza el trabajo y posibilita la descripción de eventualidades.
- Admite sonda termosensible de infrarrojo, transductores de fase, entrada de señales de CD e introducción manual de datos.
- Realiza orientación con menús, mensajes al operador y pantallas de ayuda para procedimientos.
- Permite, opcionalmente, realizar el balanceo in situ, para uno o dos planos; así como la estimación de peso de ensayo; suma vectorial (combinación de pesos); corrección de desequilibrio estático; fraccionamiento vectorial (separación de pesos); memoria para 20 configuraciones distintas de balanceo.
- Posibilidad de visualización en tiempo real, etc.

### **3.4 Sistemas avanzados de adquisición de la información.**

Los sistemas avanzados de adquisición de la información, también conocidos, como sistemas automatizados, se utilizan en aquellas máquinas de trabajo ininterrumpido de alto valor de la producción final y alto costo de las partes y componentes de las mismas. De igual manera, también es empleado el monitoreo permanente, cuando la máquina es nueva, de la cual se posee muy poca o ninguna experiencia y en la que se presentan, como consecuencia de diferentes causas, las paradas inesperadas o fallas mecánicas. Un sistema avanzado de adquisición de la información puede llegar hasta el nivel de alerta.

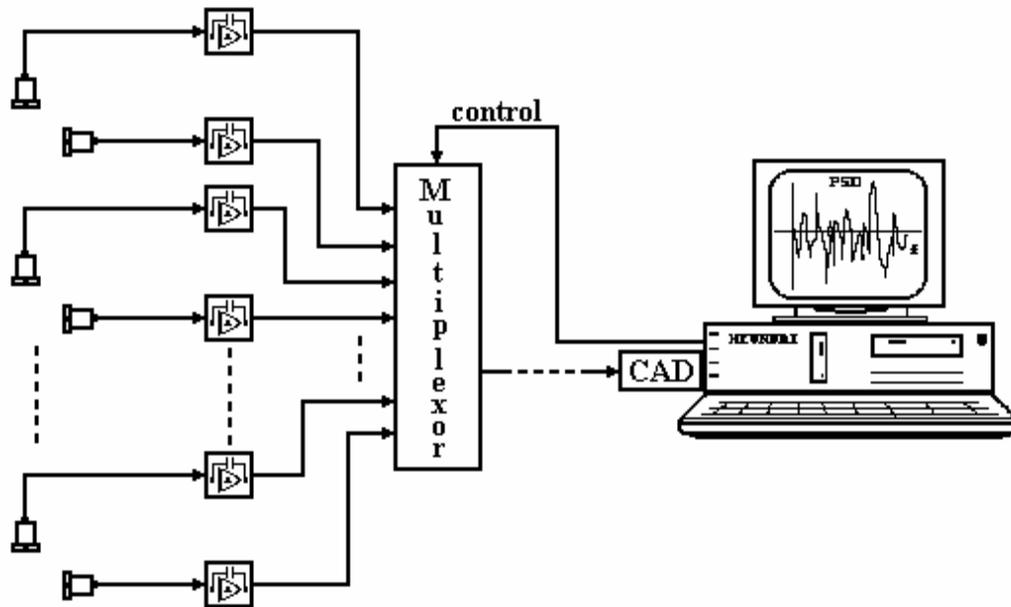
La ventaja respecto a los sistemas primarios vistos anteriormente consiste en, que la participación del hombre es mínima e inclusive nula, como en la variante de avanzada, en la cual la computadora incorpora las decisiones de los niveles de aviso con el envío de las señales correspondiente. Una señal de indicación es activada cuando la vibración alcanza el nivel de precaución, aviso, advertencia o alerta.

Los sistemas avanzados de adquisición de la información (o sistemas automatizados) no incluyen las facilidades de protección (del monitoreo permanente convencional), puesto que al alcanzar la vibración valores elevados, correspondientes al nivel de parada, deberá iniciarse una secuencia automática para sacar del servicio a la maquinaria. Este proceso es voluminoso y en la mayoría de los casos complejos, ya que complejas son, también, las importantes máquinas monitoreadas. El control de la secuencia automática para la parada de máquinas multiparamétricas, cae fuera de las posibilidades de estos sistemas dedicados a la información. Es decir, se requiere del diseño especial con el propósito de este control de protección.

En la Fig. 3.41 se muestra un sistema automatizado de adquisición de señales para monitoreo permanente de una o más máquinas rotatorias. El sistema consta de sensores, amplificadores, multiplexores, conversor análogo - digital y la MCD; y el mismo puede ejecutar:

- ◆ mediciones simultáneas y continuas de múltiples puntos de medición de la instalación y según decisiones de la MCD;
- ◆ procesamiento de la información para:
  - a) evolución de los espectros de todos los puntos de medición;

- b) comparación de espectros con el patrón;
- c) análisis de tendencias;
- d) archivo de la información por largo período de tiempo;
- e) señalización sonora o lumínica externa e indicación lumínica en pantalla, al alcanzarse el nivel de precaución correspondiente.



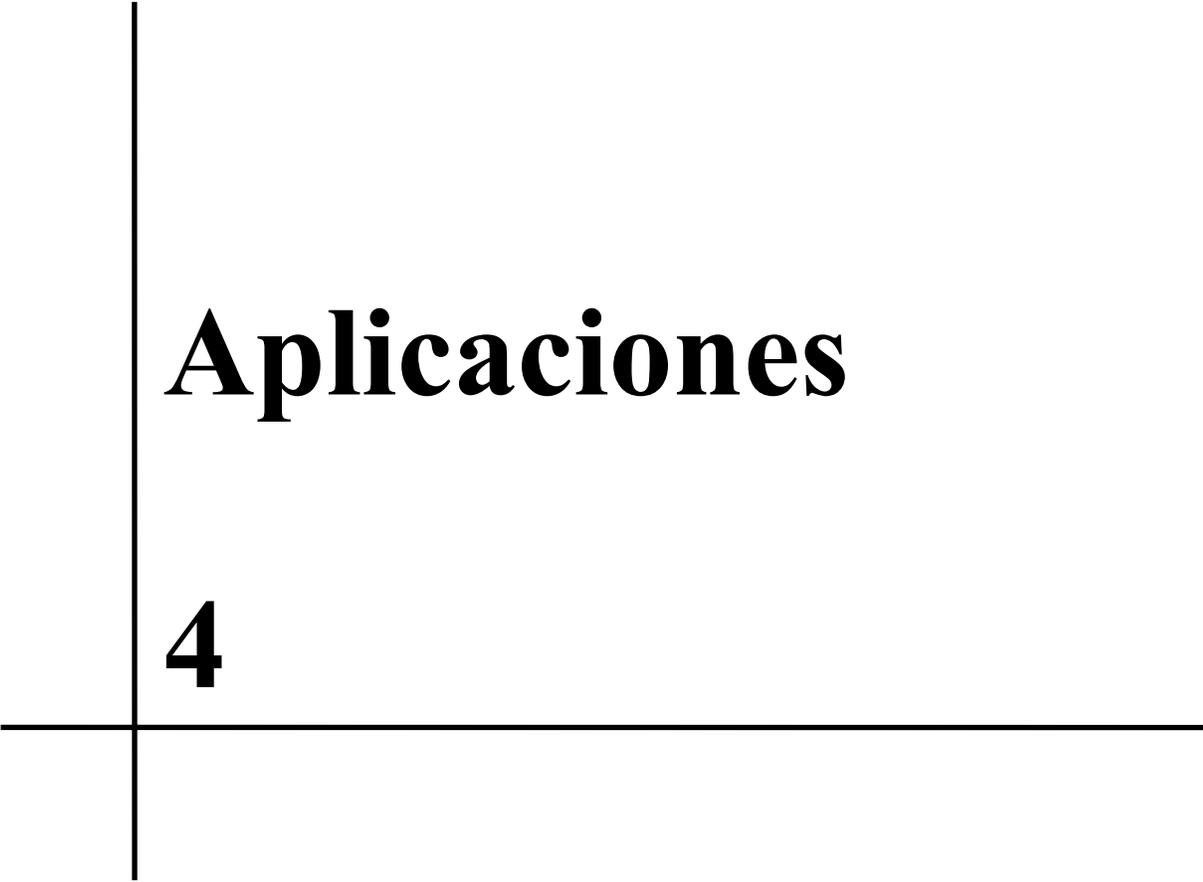
**Fig. 3.41 Esquema de un sistema avanzado de adquisición de información sobre vibraciones mecánicas.**

El elemento nuevo en el esquema de la Fig. 3.41 es el multiplexor. Los multiplexores son circuitos de combinaciones que están relacionados con la transferencia de señales. Ellos son útiles, precisamente, cuando nos encontramos ante la disyuntiva de admitir solo una de varias señales de entrada. La función específica del multiplexor es la equivalente al selector de varias posiciones, solo que en este caso mediante una señal de control se selecciona una de las entradas para que se transfiera a la salida. Las funciones contrarias son realizadas por demultiplexores.

El diseño de un sistema avanzado de adquisición de información (o sistema automatizado), por lo general abarca:

1. la evaluación del equipamiento a monitorear (adquisición de información sobre diseño, construcción, servicio, respuestas probables, fallos de funcionamiento);
2. la identificación de los fallos potenciales en funcionamiento;
3. la selección de las variables de operación de mayor responsabilidad para cada fallo potencial en funcionamiento;
4. la selección del método de medición que sea más indicativo de cambios de las condiciones mecánicas (ejemplo: desplazamiento radial-axial del árbol, aceleración o velocidad absoluta de los apoyos en direcciones radial, axial, etc.);
5. selección de los datos a presentar en pantalla; selección del sistema de chequeo y frecuencias de muestreo (variantes a asumir en situaciones de advertencias en 1, 2 ó más máquinas); selección de la evaluación de tendencias con capacidades de diagnóstico automatizado, etc.

Como máquinas importantes en la industria pueden citarse: turbogeneradores, turbocompresores, etc. Un sistema de monitoreo continuo de máquinas de este tipo no solo incluyen los sensores de vibraciones mecánicas, sino también la medición de muchos otros parámetros termodinámicos, termofísicos y químicos.



# Aplicaciones

**4**

#### **4.1 Sistemas de Unidades.**

En los capítulos precedentes fueron estudiados los distintos tipos de interacción del sistema mecánico con la fuerza excitadora, producto de lo cual en este se producía un comportamiento que podía ser descrito por las ecuaciones diferenciales lineales o por los descriptores estadísticos de las señales aleatorias. Así mismo, se analizaron las diversas formas en que puede ser captada la señal emitida por los sistemas como respuesta a la excitación recibida.

En la práctica, los sensores se seleccionan en dependencia del tipo de falla que se desea verificar. Por ejemplo, los sensores de desplazamiento brindan una buena información sobre el comportamiento de los sistemas mecánicos si la información que se busca en las señales emitidas por ellos se encuentra en la zona de bajas frecuencias.

En la medida en que los sistemas se hacen más complejos va surgiendo la necesidad de controlar las zonas de mayores frecuencias de las señales. Por esta razón se emplean sensores de desplazamiento ó sensores de aceleración.

En la Fig. 4.1 se presentan los gráficos de las señales emitidas por un sensor de aceleración, integrada después para obtener la respuesta en velocidad y otra vez más para obtener la respuesta en desplazamiento.

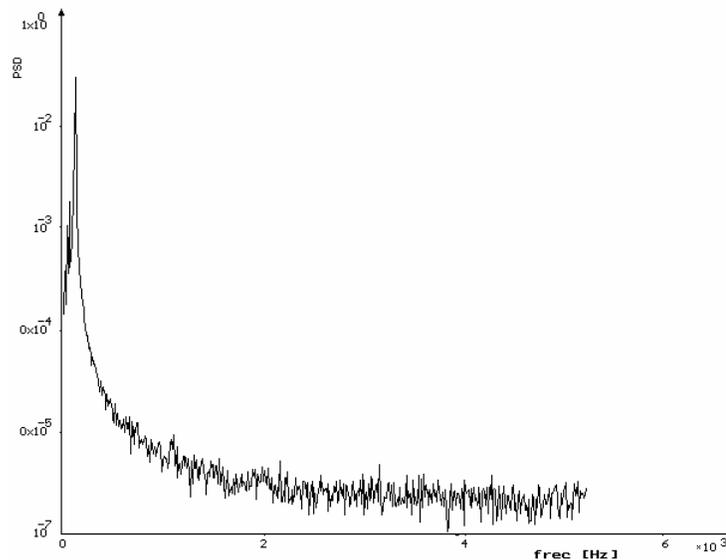
Con el sensor de velocidad el rango dinámico del espectro es más uniforme, pudiéndose registrar componentes en un mayor rango de frecuencias con respecto al sensor de desplazamiento.

En los últimos años las tareas relacionadas al análisis de señales en los sistemas mecánicos han estado vinculadas al estudio de fenómenos que tienen lugar a muy elevadas frecuencias, por ejemplo defectos en cojinetes de rodamiento, defectos en ruedas dentadas, problemas de cavitación en máquinas hidráulicas, entre otros.

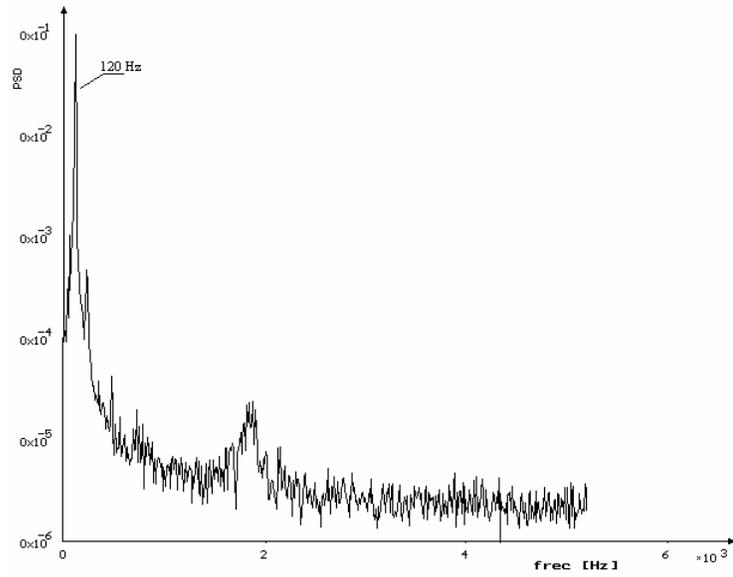
Esto exige que las señales que sean registradas por los sensores contengan toda la información necesaria en un intervalo de frecuencia que puede alcanzar los kHz. Precisamente el sensor de aceleración reúne las características necesarias para incursionar en las zonas de elevadas frecuencias de las señales vibroacústicas. Además, con la integración de la señal es posible obtener respuestas en velocidad y desplazamiento.

De lo anterior se deduce que las unidades de medida de la amplitud empleadas para el análisis vibracional se derivarán del tipo de sensor empleado, o sea, estas tres magnitudes de acuerdo a las normas ISO 2372 son:

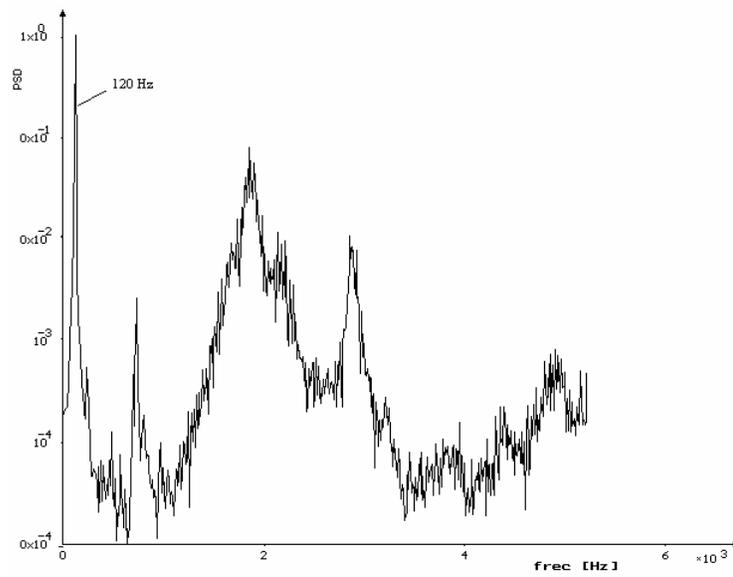
- desplazamiento (mm,  $\mu\text{m}$ ).
- velocidad ( $\text{m s}^{-1}$ )
- aceleración. ( $\text{ms}^{-2}$ ) ó gravedad ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ).



**Fig. 4.1 a** Gráficos de la señal en frecuencia , desplazamiento



**Fig. 4.1 b** Gráficos de la señal en frecuencia , velocidad



### Fig. 4.1 c Gráficos de la señal en frecuencia , aceleración

Para ilustrar lo antes expuesto se analizará el siguiente ejemplo:

Si la señal registrada con un sensor del tipo acelerómetro es igual a  $A_0 e^{i\omega t}$ , entonces la velocidad puede ser obtenida integrando la función de aceleración

$$\dot{x} = \int a \cdot dt = \int A_0 e^{i\omega t} dt = \frac{A_0}{i\omega} e^{i\omega t} = V_0 e^{i\omega t}$$

si se desea obtener el parámetro desplazamiento, entonces se repite la integración

$$x = \int \dot{x} dt = \int V_0 e^{i\omega t} dt = \frac{A_0}{(i\omega)^2} e^{i\omega t} = X_0 e^{i\omega t}$$

donde

$$X_0 = -\frac{A_0}{(\omega)^2}$$

Como se observa de las ecuaciones anteriores la respuesta del sistema mantiene la misma frecuencia al pasar de una unidad de medida a otra, sólo cambian la amplitud y la fase.

La amplitud de la señal generalmente es expresada por los valores RMS, pero en ocasiones es conveniente conocer los valores pico y los pico-pico. En todos esos casos las unidades de medida serán las correspondientes a la aceleración, velocidad o desplazamiento. El valor RMS reúne una serie de ventajas antes los restantes parámetros. Para analizar este planteamiento se presenta el Ejemplo 4.1.

Como se aprecia de la figura 4.2, correspondiente al ejemplo antes citado, hay varias combinaciones de dos defectos característicos en máquinas rotatorias:

- primer defecto: se manifiesta a la frecuencia fundamental
- segundo defecto: se manifiesta a la frecuencia del segundo armónico

En estas combinaciones se ha variado el ángulo de fase entre las señales de los defectos. Como se aprecia el valor pico de la señal resultante cambia cuando varía el ángulo de fase entre las dos señales iniciales, mientras que el valor RMS permanece constante. De esta forma el valor RMS permite identificar si la amplitud de la señal ha variado debido al surgimiento o evolución de una falla, descartando cualquier otra causa.

#### **Ejemplo 4.1**

Determinar la variación del valor RMS de la señal formada por una onda de frecuencia igual a 60 Hz, cuando se le incorpora otra correspondiente a su segundo armónico, si las amplitudes son iguales a:  $A_1 = 5.32 \text{ mm}$  y  $A_2 = 2.45 \text{ mm}$

**Solución:** El valor de la RMS de la señal se determinará empleando la expresión de la varianza para el caso en que  $\mu_x = 0$  (señal sinusoidal). En este caso la raíz cuadrada de los valores cuadráticos medios, que es igual a la desviación estándar, será el valor RMS de la señal.

$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2}}$  ; donde  $\overline{x^2} = \sum_n \overline{x_n^2}$  representa el espectro discreto de la señal. Para el

ejemplo que se analiza  $\overline{x_n^2}$  es el valor cuadrático medio de cada componente (n) de la señal. Si la señal es del tipo sinusoidal este valor puede obtenerse a partir de los valores de la amplitud  $A_n$  de cada componente.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_n A_n^2}$$

sustituyendo los valores de amplitud de las dos ondas

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2)} ; \quad RMS = \sqrt{\frac{1}{2}(5.32^2 + 2.45^2)} = 4.14 \text{ mm}$$

determinando los valores RMS de cada onda se tiene lo siguiente:

$$RMS_{(f_0)} = \sqrt{\frac{5.32^2}{2}} = 3.76 \text{ mm} ; \quad RMS_{(2.f_0)} = \sqrt{\frac{2.45^2}{2}} = 1.73 \text{ mm}$$

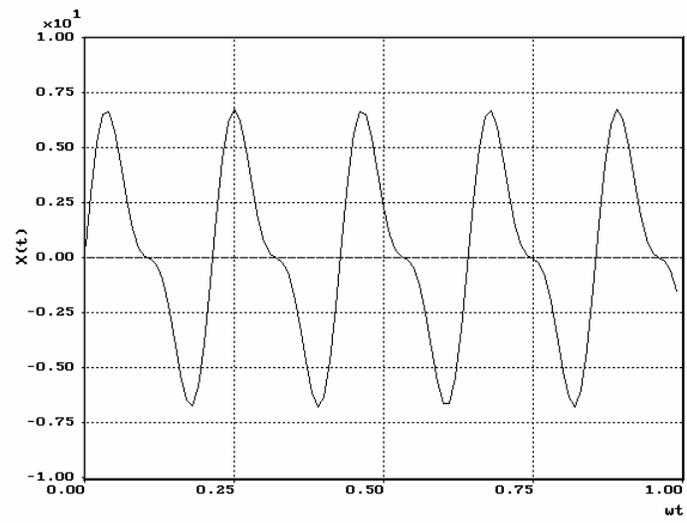
Como se aprecia de los resultados el ángulo de fase de las ondas que se combinan no interviene en la determinación del valor de la RMS de la señal resultante.

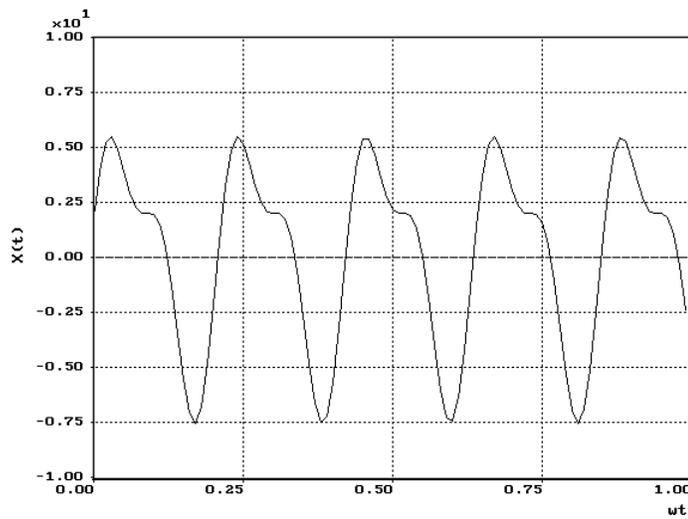
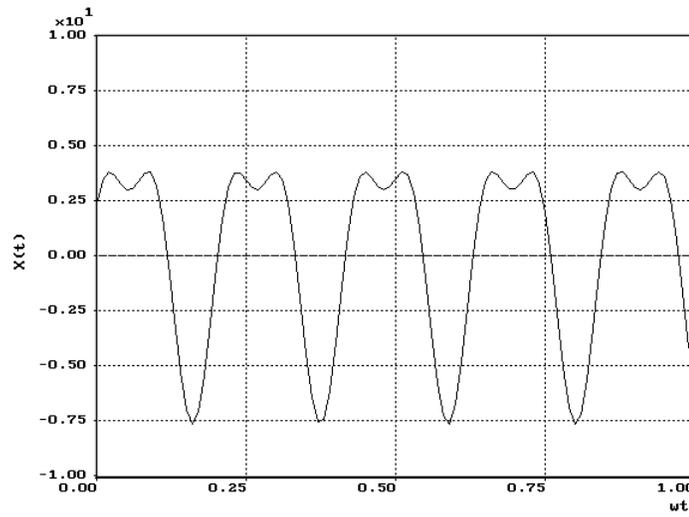
Si se compara el valor de la RMS de la señal correspondiente al primer armónico con el valor RMS de la señal resultante, se puede constatar que el valor aumentó en 10.1% debido a la presencia de la segunda componente.

Como el valor RMS no depende del ángulo de fase será el mismo para las diferentes relaciones planteadas. Sin embargo, las amplitudes tendrán otro comportamiento como se aprecia de la figura 4.2. La amplitud resultará de la suma fasorial de las amplitudes de las oscilaciones que se combinan, o sea, dependen del ángulo de fase.

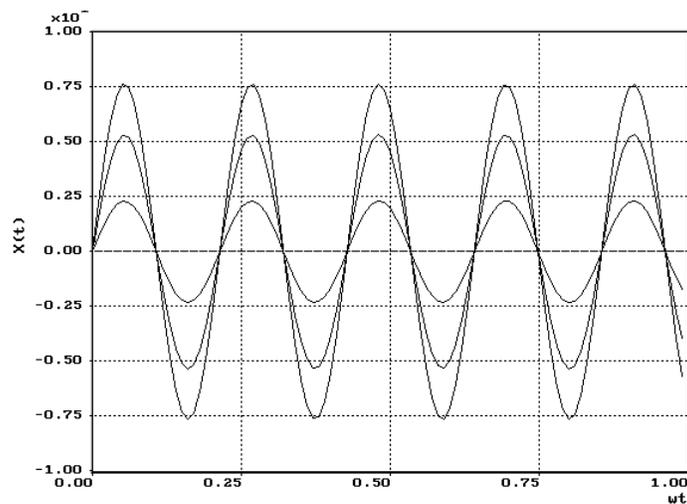
Si se analiza el caso de la combinación de dos ondas de igual frecuencia, como por ejemplo, cuando se superponen defectos relacionados con el desbalance y desalineamiento, el valor RMS se determinará por un procedimiento igual al anterior y si además se considera que las amplitudes coinciden con los valores anteriores los valores de la RMS para los diferentes ángulos de defasaje serán los mismos. En el ejemplo se consideran tres ángulos de defasaje:  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0^\circ$  ;  $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi / 2$  ;  $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi / 6$ , presentados respectivamente en las figuras.

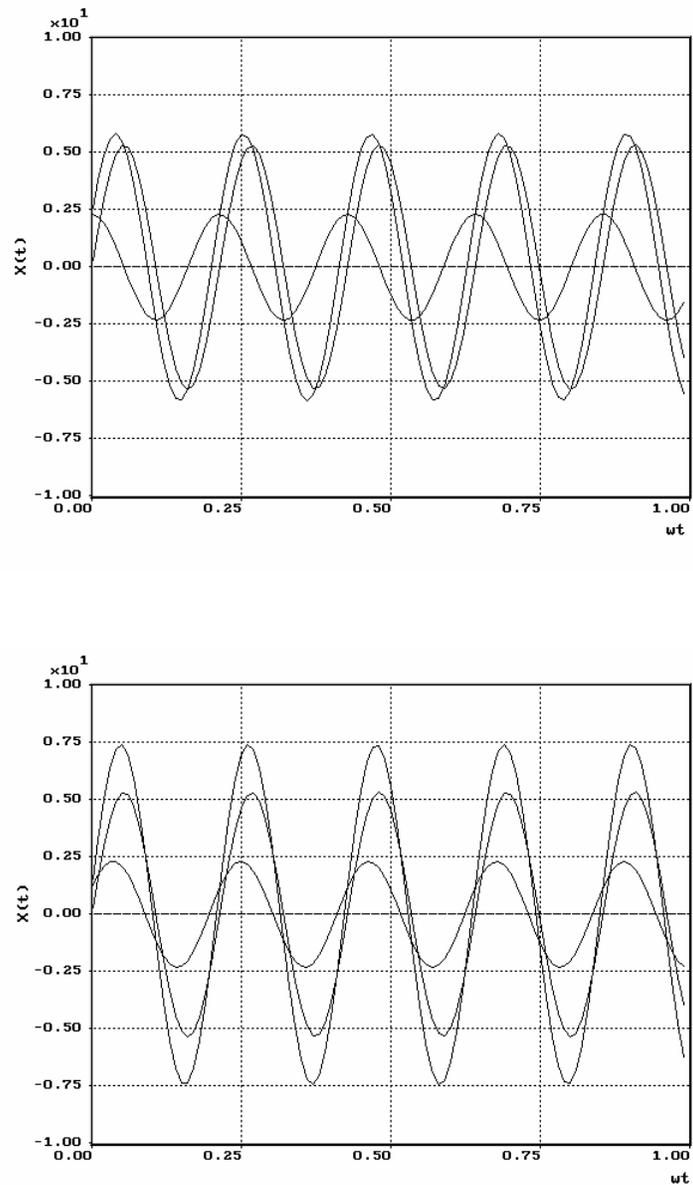
a) primer y segundo armónico





b) Defectos a iguales frecuencias.





**Fig. 4.2 Combinación de dos ondas a) primer y segundo armónico  
b) defectos a iguales frecuencias**

Otra unidad de medida muy utilizada en los últimos tiempos para determinar la amplitud de las vibraciones es el **decibel**.

Esta unidad de medida se ha introducido en las técnicas de análisis de señales vinculadas a las vibraciones mecánicas por las ventajas que introduce cuando se trabaja sobre los gráficos de los espectros de las señales en escala logarítmica.

Mediante los gráficos de la señal en frecuencia es posible identificar que elemento de la máquina que se estudia comienza a deteriorarse y a que velocidad evoluciona la falla. Pero ocurre que las fallas que tienen lugar a altas frecuencias ( $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 4$ ), presentan variaciones muy pequeñas de su amplitud cuando evolucionan y pueden resultar de poco interés si existen otros picos de amplitudes mayores dentro del espectro, como ocurre con los defectos que tienen lugar a bajas frecuencias ( $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 4$ ), cuando se emplean gráficos de escalas lineales para representarlos.

Por ejemplo, considérese una escala lineal con 100 divisiones donde cada una de esas divisiones representa el 1% de toda la escala. Considérense dos picos de amplitud en los rangos de (10-100) y de (1 a 10), si el error de lectura es del 10%, para un valor de amplitud igual a 90 esto significará que la amplitud del pico a la frecuencia dada puede oscilar entre 81-99, siendo visibles estas variaciones en la escala. En el caso de un valor de amplitud de 9, entonces la amplitud variará entre 8.1-9.9, y estas variaciones son muy poco apreciables en esta escala. Con esta condición para el análisis, es mínima la posibilidad de observar la evolución de algún pico que se encuentre por debajo de 1. En este ejemplo en cada rango se ha considerado una relación de 10 : 1 que para el rango de (10-100) incluye 90 divisiones y para el rango de (1-10) incluye solo 9 divisiones. O sea, los dos rangos de amplitud de la escala tienen valores diferentes .

Si por el contrario se asume que cada rango de amplitud tiene el mismo valor dentro de la escala, la relación cambia ampliándose notablemente el rango dinámico del espectro, pudiéndose notar con claridad la evolución de todos aquellos picos que anteriormente no eran apreciables. De esta forma, por debajo de 1 se pueden considerar todos los rangos que el usuario requiera para observar con más detalles la evolución del pico que represente una falla de su sistema y desde 100 hasta el valor 0 todos los picos tendrán la misma resolución dentro del espectro.

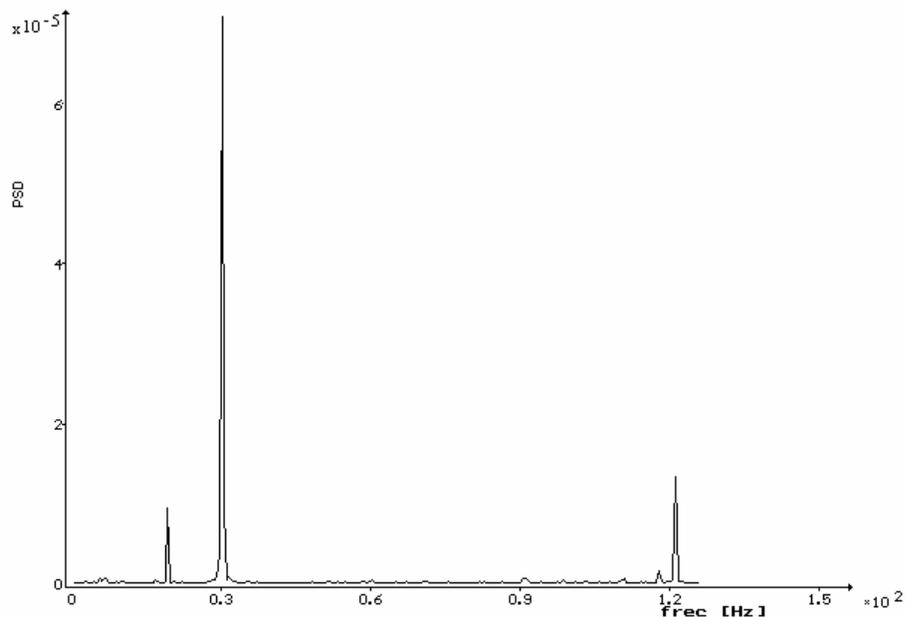
**Ejemplo 4.2**

En la figura 4.3 se presentan dos gráficos (a) y (b) de la señal en frecuencia de un ventilador de 1740 RPM.

a) Este gráfico corresponde al espectro en escala lineal, donde se observan tres picos de amplitud elevada con frecuencias iguales a: 1)  $f_0 = 19.4 \text{ Hz}$ , 2)  $f_0 = 29 \text{ Hz}$

3)  $f = 120 \text{ Hz}$ , que corresponden a un pico de baja frecuencia que puede estar relacionado con problemas en los cojinetes, el pico a la frecuencia fundamental de rotación y el segundo armónico de la frecuencia de la línea. Además, aparece un pequeño pico a 90 Hz que prácticamente no se aprecia en el gráfico en escala lineal, ya que la resolución del gráfico es de 10:1.

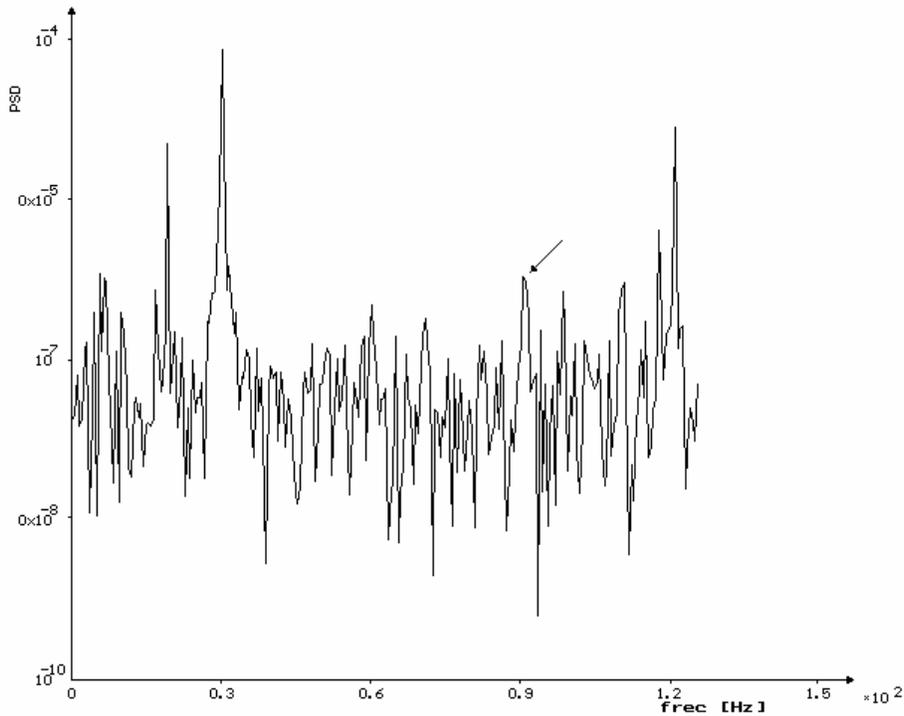
a) Gráfico en escala lineal



**Fig. 4.3a. Representación de la señal en frecuencia. Escala lineal**

b) Se presenta la misma señal, pero ahora en un gráfico con la escala logarítmica de la amplitud. En este gráfico todos los picos se encuentran en el mismo rango dinámico, siendo ahora la resolución del espectro de 100 000:1, por lo que brinda una clara información de los picos que se encuentran con amplitudes cuyos valores están por debajo de la unidad (respecto a la escala lineal).

b) Gráfico en escala logarítmica



**Fig. 4.3b Representación de la señal en frecuencia. Escala logarítmica**

El decibel se define mediante la siguiente relación:

$$dB = 20 \log_{10} \left( \frac{X}{X_0} \right)$$

donde:

$X$  ; es la unidad que se desea transformar

$X_o$  ; es la unidad de referencia de  $X$

Si la escala empleada para registrar el gráfico de la señal en frecuencia tiene una resolución de 1000:1, esto significa que tiene un rango dinámico de  $10^3$  , o sea, tiene tres décadas y cada una equivale a 20 dB por lo que tendrá una amplitud máxima de 60 dB.

**Ejemplo 4.3**

La figura 4.4 muestra los gráficos de la señal en el tiempo, la señal en frecuencia y la densidad de probabilidad de una máquina eléctrica con 1740 rpm. Determinar las amplitudes de las componentes de la señal en unidades de desplazamiento, si la misma fue registrada por un acelerómetro.

Solución: Del gráfico espectral se tienen tres componentes fundamentales :

subarmónico de la frecuencia fundamental	falla en cojinetes
frecuencia fundamental	desbalance
cuarto armónico de la frecuencia fundamental	desajuste mecánico
segundo armónico de la frecuencia de la línea	problemas eléctricos

Del gráfico de la densidad de potencia espectral discreta pueden determinarse los valores de amplitud de cada componente expresado en  $(\text{mm s}^{-2})^{-2}/\text{s}^{-1}$

$$S_{(\omega)} = S_{(\omega_1)} + S_{(\omega_2)} + S_{(\omega_3)} + S_{(\omega_4)}$$

No del pico en el gráfico	$S_{(n\omega_i)}$ ( $\text{mm s}^{-2})^{-2}/\text{s}^{-1}$	$f(\text{Hz})$	$\Delta\omega$ ( $\text{s}^{-1}$ )	$A = \sqrt{2 \cdot S_{(n\omega_0)} \cdot \Delta\omega}$ ( $\text{mm s}^{-2}$ )
1	0.98	19	6.13	3.46
2	7.12	29	6.13	9.346
3	0.14	116	6.13	0.4902

4	1.34	120	6.13	4.055
---	------	-----	------	-------

Tabulando los valores de la función de densidad de potencia espectral  $S_{(\omega)}$  que aparecen en el gráfico de la figura 4.4, se facilitará el procedimiento de cálculo de las amplitudes en unidades de desplazamiento.

El valor  $\Delta\omega$  se obtiene de las condiciones establecidas para la captación de la señal por el sistema de adquisición y procesamiento. En este caso es igual a  $2\pi f_{\max} / \text{número de puntos a muestrear}$ , donde  $f_{\max}$  es igual a 1000 Hz y el número de puntos 1024.

La respuesta del sistema expresada en aceleración será igual a:

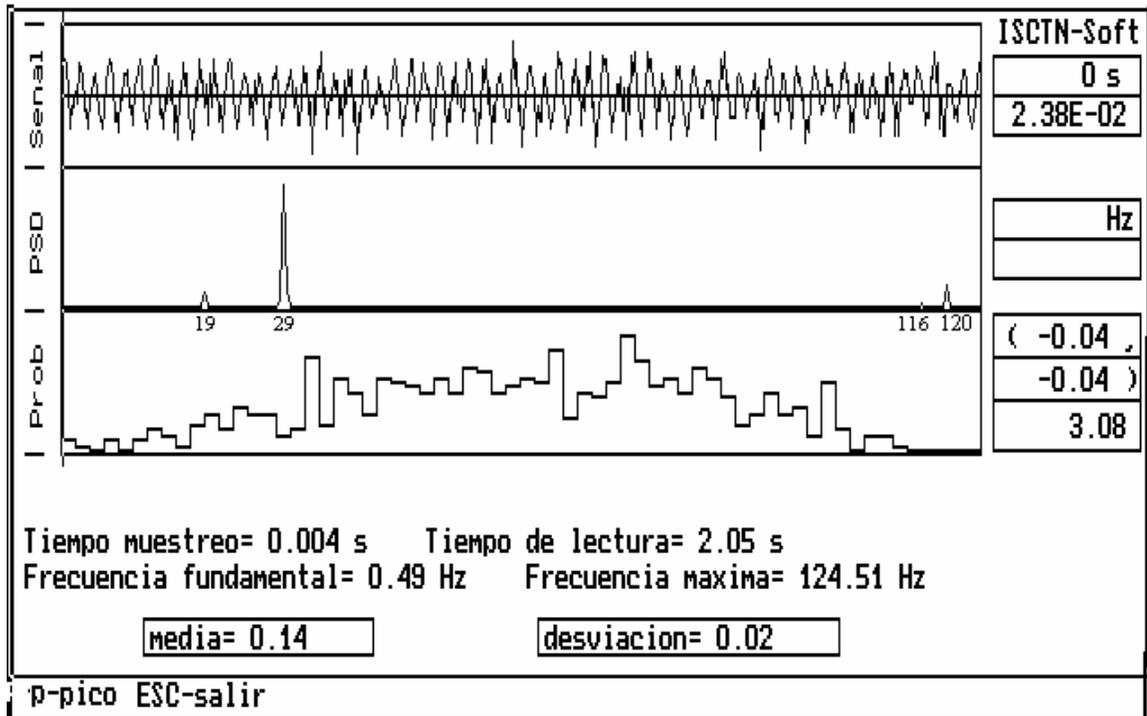
$$a(t) = 3.4669 \text{sen}(\omega_1 t) + 9.346 \text{sen}(\omega_2 t) + 0.4902 \text{sen}(\omega_3 t) + 4.055 \text{sen}(\omega_4 t)$$

Para expresarla en unidades de desplazamiento la amplitud de cada componente debe ser afectada por el coeficiente  $\frac{1}{(\omega_n)^2}$

$$x(t) = \left( \frac{3.4669}{(\omega_1)^2} \right) \text{sen}(\omega_1 t) + \left( \frac{9.346}{(\omega_2)^2} \right) \text{sen}(\omega_2 t) + \left( \frac{0.4902}{(\omega_3)^2} \right) \text{sen}(\omega_3 t) + \left( \frac{4.055}{(\omega_4)^2} \right) \text{sen}(\omega_4 t)$$

El signo negativo no fue indicado, pero se debe recordar que la aceleración está defasada  $180^\circ$  respecto al desplazamiento.

La función de densidad de probabilidad muestra el comportamiento aleatorio de la señal, o sea una forma Gaussiana, presentando una pequeña influencia periódica por la tendencia a la concavidad en la zona central del gráfico.



**Fig 4.4 Gráficos de la señal de un motor eléctrico  
de potencia menor a 15 Kw**

#### **Ejemplo 4.4**

Una turbina de vapor presenta una vibración de  $41 \mu\text{m}$  RMS. Si la misma gira a 3600 RPM y tiene una velocidad crítica de 2500 RPM determine la magnitud de la fuerza excitadora. Considere  $\xi$  igual 0.2.

Solución:

Como el valor de la vibración está dado en RMS se puede determinar el valor cuadrático de la señal

$$RMS = \sqrt{\overline{x^2}}$$

de donde

$$\overline{x^2} = (41)^2 = 1681. \mu m^2$$

entonces la fuerza impulsiva puede determinarse mediante la siguiente relación:

$$\overline{x^2} = \sum_n \frac{F_0^2}{2k^2} \cdot |H_{(n,\omega)}|^2$$

$$\overline{x^2} = \sum_n \frac{\overline{F^2}}{k^2} |H_{(n,\omega)}|^2$$

despejando el valor cuadrático de la fuerza impulsiva ( para n=1) se tiene que la misma es igual a:

$$\overline{F^2} = \frac{\overline{x^2}}{|H_{(\omega)}|^2} k^2$$

El término  $|H_{(\omega)}|$  representa el factor de ganancia de la señal y se determina mediante la expresión siguiente:

$$H_{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$H_{(\omega)} = \frac{1}{1.2217} = 0.818$$

de donde

$$\frac{\overline{F^2}}{k^2} = \frac{1681}{(0.818)^2} = (2509.06) \mu m^2$$

y la amplitud de la fuerza excitadora será igual a:

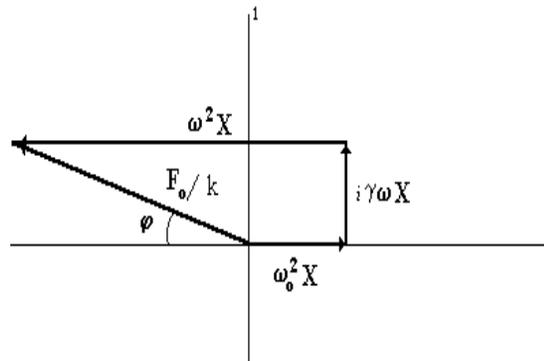
$$\frac{F_0}{k} = \sqrt{2 \cdot F^2} = 70.8 \text{ } \mu\text{m}$$

El coeficiente  $k$  debe estar expresado en  $\frac{N}{\mu\text{m}}$

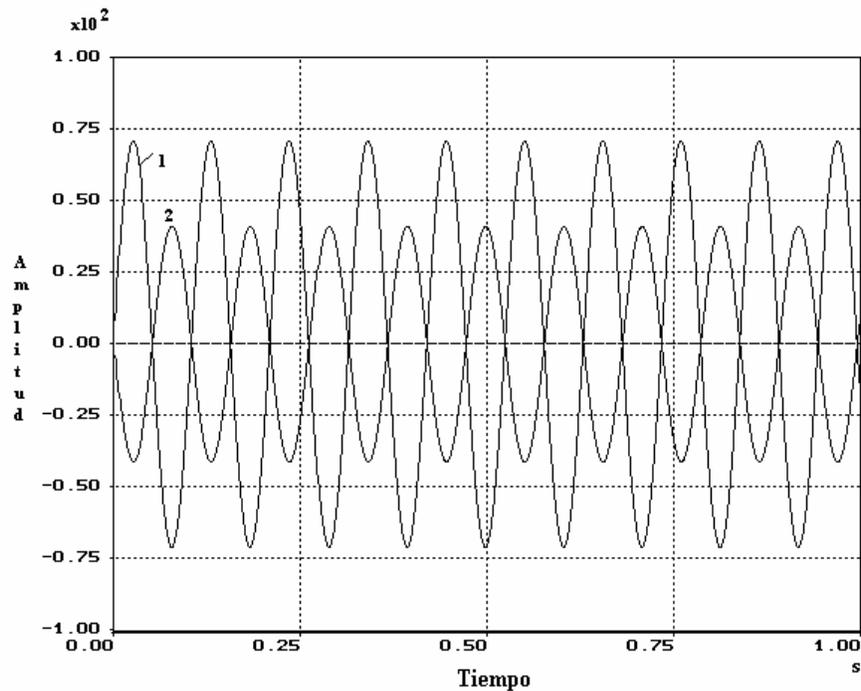
El ángulo de fase entre la excitación y la respuesta del sistema puede determinarse mediante la relación siguiente:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\xi\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \tan^{-1} \frac{24}{-1100} = -0.02218(\text{rad})$$

a) Diagrama de fases



b) Oscilaciones correspondientes a la respuesta del sistema y la fuerza excitadora



**Fig 4.5 Comportamiento del sistema bajo la acción de la fuerza excitadora.**

#### **4.2 Defectos más comunes en máquinas:**

A continuación se detallarán algunos ejemplos donde se exponen cuales son los defectos más comunes en máquinas.

- **Desbalance:**

Es la causa más común de vibración en las máquinas rotatorias. Su detección mediante el empleo del análisis de señales es posible, ya que se manifiesta a la frecuencia fundamental de rotación de la máquina. Se recomienda medir en la dirección axial y radial. En la dirección radial su amplitud es aproximadamente dos veces que en la dirección axial.

Es importante distinguir entre la falla por desalineamiento u otro defecto que pueda manifestarse a la misma frecuencia, como es el caso de los defectos asociados a fallas eléctricas. Si la

amplitud disminuye abruptamente al desconectar la máquina la falla es de origen eléctrico y si cae gradualmente es desbalance.

- **Desalineamiento:**

Es la segunda causa de vibración en las máquinas rotatorias. El defecto se manifiesta a la frecuencia de rotación y también puede manifestarse en el segundo y tercer armónico de la frecuencia de rotación. Se caracteriza porque la amplitud en la dirección axial es mayor que en la radial.

- **Eje curvado:**

Es un defecto que tiene características parecidas al desalineamiento. Para corroborar la causa se precisa del análisis de fases entre los dos extremos del eje.

- **Defectos en cojinetes de rodamiento:**

Se caracteriza porque en la señal en frecuencia de la vibración aparecen picos a elevada frecuencia, así como una región de bajas frecuencias. Estas frecuencias no son múltiplos de la frecuencia fundamental de la máquina, pero pueden ser calculadas mediante las recomendaciones dadas por las normas establecidas al efecto.

- **Desajuste mecánico**

La vibración tiene lugar porque existe holgura entre la máquina y los apoyos u otra parte estructural, por ejemplo tornillos sueltos. Se manifiesta con un pico al segundo armónico de la frecuencia fundamental de rotación .

- **Defectos en transmisiones por correas**

El defecto puede tener lugar cuando existe desajuste entre la correa y la polea. Este desajuste puede venir dado por exceso en el apriete o por holgura entre la polea y la correa. Esto último provoca el deslizamiento de la correa sobre la superficie de la polea.

La vibración que provoca este defecto se manifiesta con picos a la frecuencia fundamental de rotación de la correa, así como al segundo, tercero y cuarto armónico de esta frecuencia.

#### **4.3 - Algunas máquinas y sus defectos más comunes.**

En este epígrafe se especificarán los defectos más comunes en algunas máquinas y se mostrarán los gráficos de las señales en el tiempo y en frecuencia de alguna de ellas.

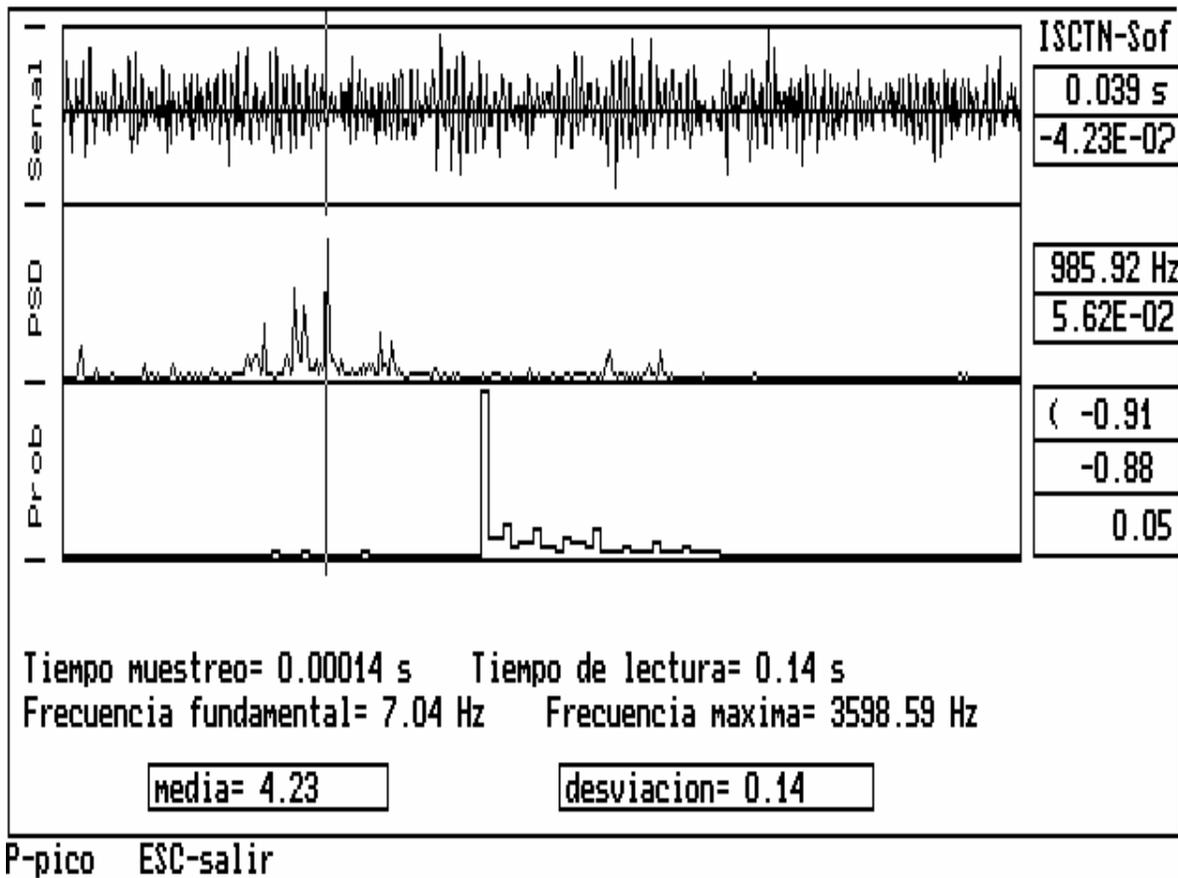
- **Máquina hidráulica (bomba centrífuga)**

En ella pueden presentarse los defectos descritos anteriormente, prescindiendo del defecto relacionado a los cojinetes de rodamiento si no los tiene. En su lugar, pueden entonces presentarse los defectos relacionados con los cojinetes de deslizamiento, por ejemplo la película de aceite puede provocar vibraciones a frecuencias menores que la fundamental de la máquina.

Además, son comunes otros defectos relacionados con:

cavitación:

La cavitación puede manifestarse en estado incipiente o desarrollada. En ambos casos la señal emitida por la máquina puede contener esta información manifestándose siempre por picos en una ancha banda de frecuencia con amplitudes inestables.



**Fig 4.5** Gráfico donde se manifiesta el ancho de frecuencia con picos variables relacionados con la presencia de cavitación.

#### Pulsaciones del flujo

Las pulsaciones debido al flujo turbulento provocan vibraciones que se manifiestan con picos de amplitud aleatoria en un ancho de banda en la zona de media frecuencia. La pulsación en la zona de la succión provoca vibraciones a baja frecuencia y tienen la misma forma de manifestarse.

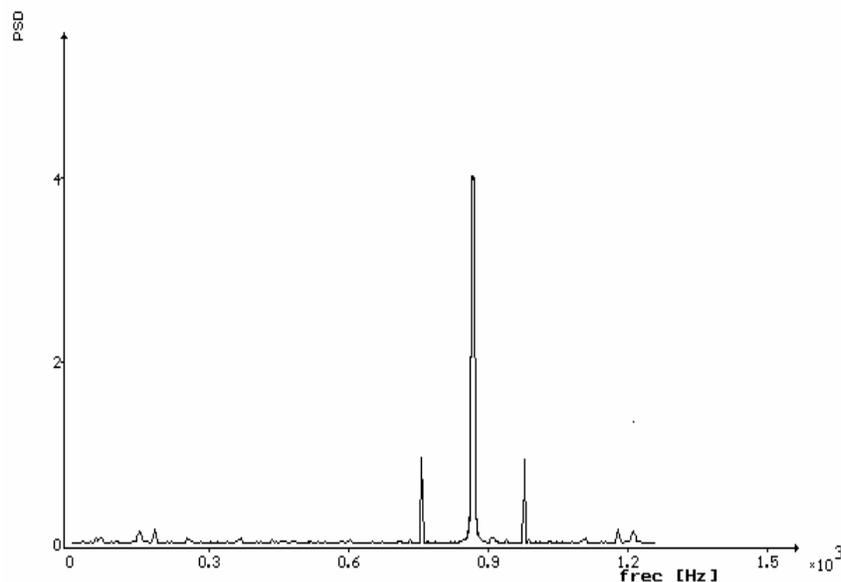
#### Vibraciones en los impelentes

Estas vibraciones se producen cuando el fluido que pasa a través de los canales interálabe es cortado por la voluta o el difusor. La frecuencia de vibración, denominada frecuencia de paletas,

es determinada multiplicando la frecuencia fundamental de rotación por el número de álabes en la rueda. Generalmente estas frecuencias no son significantes, pero si aparecen con amplitudes considerables puede ocurrir que exista resonancia. Para eliminar este defecto será necesario cambiar la velocidad de rotación de la máquina o rediseñar el componente que resuena.

- **Transmisiones dentadas.**

Las fallas descritas que caracterizan a las máquinas rotatorias son también causas de defectos en las transmisiones dentadas. El desalineamiento es uno de los aspectos que mayor vigilancia exige para un correcto trabajo de estos sistemas. Esto se debe a que aquí es necesario alinear no sólo a la rueda como tal, sino también a los ejes a donde ella va montada.



**Fig 4.6 Señal en el tiempo de una transmisión dentada donde se aprecian los picos laterales a la frecuencia de engranaje.**

La vibración en estos sistemas se caracterizan por tener frecuencias relacionadas con el número de dientes, o sea, la frecuencia de engranaje es igual al producto del número de dientes por la frecuencia de rotación del eje al que está acoplada la rueda. Si ocurre alguna falla, aparecen

picos laterales a la frecuencia de engranaje a una distancia igual a la frecuencia de rotación del eje. Si los picos a estas frecuencias comienzan a aumentar es señal de deterioro de los dientes, defecto que también puede manifestarse por el aumento del pico de la frecuencia de engranaje. La gráfica de la señal en el tiempo en estos casos es modulada.

- **Ventiladores**

Los ventiladores presentan las mismas fallas comunes de las máquinas rotatorias, sin embargo en ellos la falla que más los afecta es el desbalance. Esto se debe a que ellos están expuestos a las deposiciones sobre los álabes de suciedades y humedad lo cual provoca la aparición de fuerzas excitadoras sobre las ya existentes.

Otro problema que pudiera resultar común en los diferentes tipos de ventiladores es el agrietamiento de los álabes. Este agrietamiento es debido a la presencia de resonancia en los álabes. La resonancia puede ser causada por las fuerzas aerodinámicas que excitan las frecuencias naturales de los álabes, así como otros defectos que pueden tener frecuencias similares a ésta y por lo tanto provocar la rotura.

- **Motores Eléctricos.**

Los motores eléctricos presentan, además de los defectos característicos en máquinas rotatorias todos aquellos que están relacionados con las fuerzas magnéticas las que se manifiestan a la frecuencia de la línea y sus armónicos. Si la frecuencia fundamental de rotación del motor coincide con la de la línea, caso muy común, para descartar otra falla que se manifieste a esa misma frecuencia se desconecta el motor de la red. Si el pico a la frecuencia de la línea cae bruscamente es un problema eléctrico, si el pico a esa frecuencia cae paulatinamente puede ser desbalance.

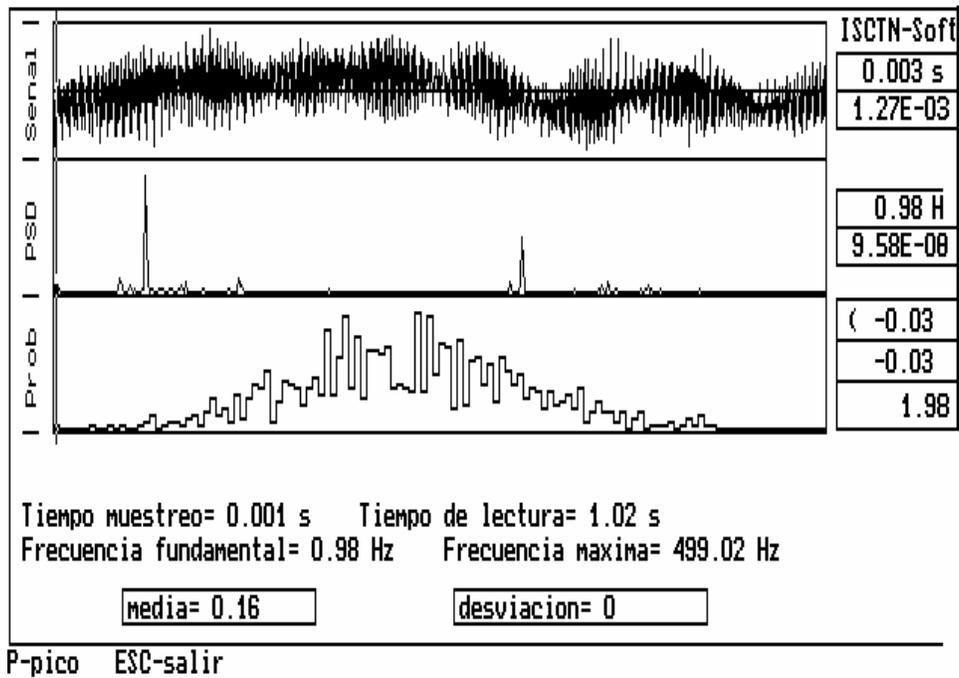
En motores de inducción la señal en el tiempo puede presentar modulación como reflejo de la pulsación que tiene lugar en el mismo. Esto significa que el segundo armónico de la frecuencia

de la línea es modulado por la frecuencia de deslizamiento del motor o su segundo armónico, lo que significa la presencia de defectos relacionados con desbalance, ejes curvados roturas de rodamientos o roturas de las barras del rotor.

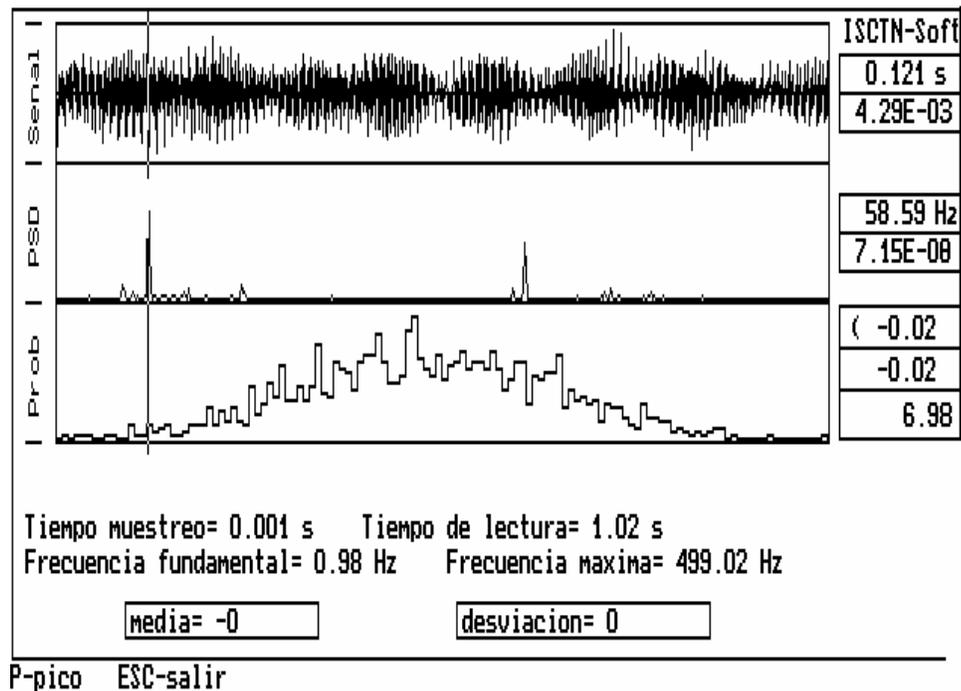
• **Otras causas de presencia de vibraciones**

En este grupo se pueden incluir las vibraciones causadas por fuerzas excitadoras externas a la máquina que se estudia, por ejemplo las ambientales o de fondo. Estas vibraciones son causadas por la cercanía a la máquina que se monitorea de otras máquinas, las que transmiten la excitación propia si no están bien aisladas o si son máquinas muy grandes donde la magnitud de las fuerzas excitadoras también lo son.

a)



b)



**Fig 4.7 Gráficos de las señales de un sistema donde están presente las vibraciones ambientales**

En el gráfico de la figura 4.7 que se muestra a continuación se presenta este hecho. En el gráfico (a) se observa el pequeño pico a baja frecuencia 0.98 Hz que provoca la oscilación de todo el sistema. En el gráfico (b) la señal ha sido filtrada y se observa como la señal ha tomado una forma más estable.

#### 4.4 Análisis de fase

Otro parámetro importante para diagnosticar las causas de falla de una máquina lo constituye el análisis de fase.

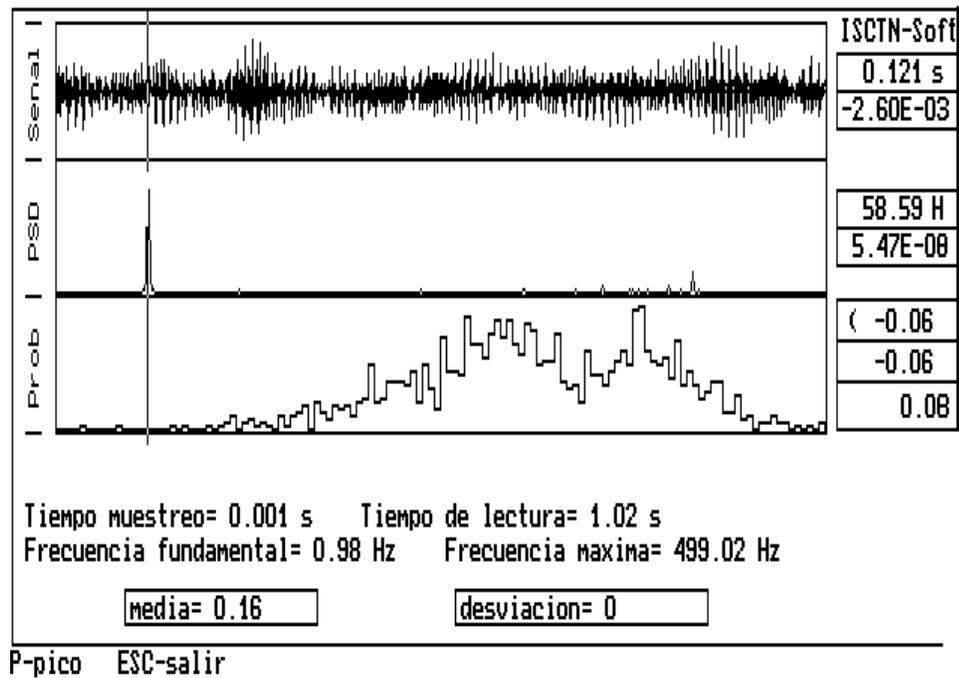
Como se pudo apreciar de la descripción de las causas comunes de la vibración explicadas anteriormente, existen defectos que se manifiestan a la misma frecuencia, luego es necesario disponer de una herramienta adicional al estudio espectral que permita identificar exactamente la

falla. Por ejemplo, para identificar si la falla es por eje curvado o por otra falla que se manifiesta a la misma frecuencia se mide la fase en ambos extremos. Si la diferencia de fase entre ambas señales es aproximadamente  $180^\circ$ , entonces el defecto está asociado a eje curvado.

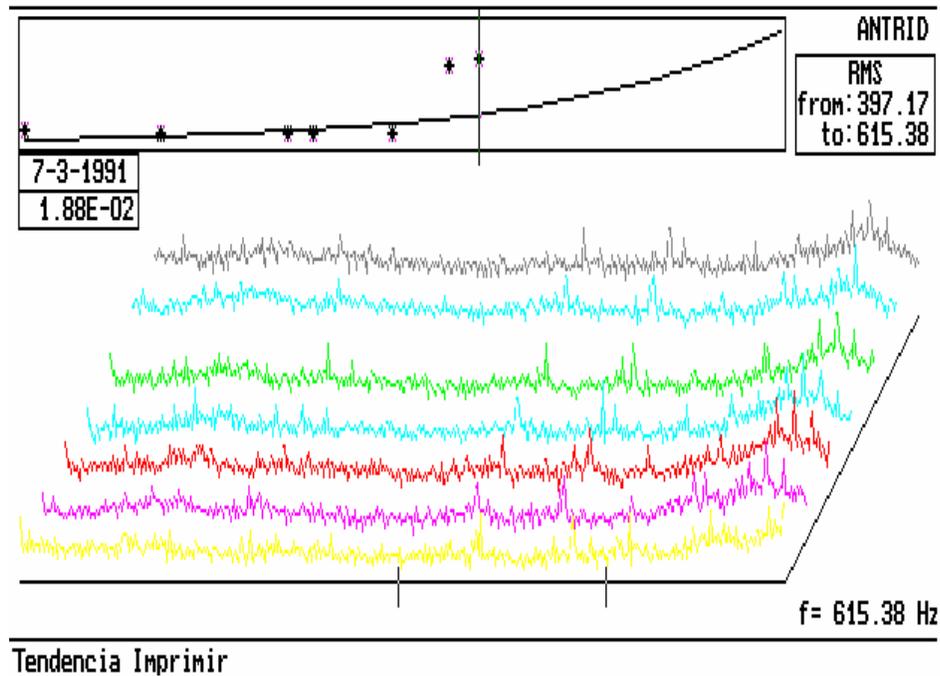
El análisis de fase es también muy empleado para determinar desbalance en las máquinas rotatorias.

#### **4.5 A modo de conclusión.**

De todo lo expuesto anteriormente se desprende que para llevar a cabo un estudio vibracional de las máquinas u otros equipos es necesario disponer de los datos iniciales para establecer los patrones de comparación. Si son valores globales se realizará el análisis por tendencia del aumento de esos valores (RMS) y si son espectros se debe contar con los espectros patrones, figura 4.8, de la señal en los puntos de medición que hallan sido seleccionados. De esta forma se puede construir el gráfico tridimensional con la finalidad de hallar la tendencia de los picos a las frecuencias que son de interés, como se muestra en la figura 4.9.



**Fig 4.8** Señales patrones de una máquina hidráulica de 750 W donde se muestra el pico correspondiente a la frecuencia fundamental de rotación de la máquina y otros pequeños picos relacionados con las fuerzas hidrodinámicas en la zona de los álabes.



**Fig. 4.9 Gráfico tridimensional de las señales en frecuencia de una bomba de inyección para un motor Diesel de potencia mayor a 750 Kw.**

En la gráfica de la figura 4.9 se muestra enmarcada la zona donde existe mayor variación en los picos de las señales. A partir de esta selección el sistema determina los valores RMS correspondientes a cada señal, que son mostrados en la ventana superior izquierda del gráfico, para realizar el análisis de tendencia.

## **BIBLIOGRAFIA**

### CAPITULO I

- IRD MECHANALYSIS. Technical paper No.113.
- Manuales sobre Mantenimiento Industrial., Escuela de Capacitación, MINBAS., 1990.
- International Standard Organizationn (norma ISO 2372). Guia sobre la severidad de vibraciones en máquinas.
- SPM Instruments A B / 1991.
- M. Piedra, E. Socorro, E. Vega., “Sistema de Mantenimiento predictivo para la bomba de alimentar de la Central Termoeléctica Antonio Maceo”., ISCTN,1994.
- IRD. MECHANALYSIS. Technical Paper No 107. “Preventive Maintenance using Vibration Measurement Device”.
- “Sentido y alcance del mantenimiento basado en la condición”; Mantenimiento; España; No. 31; Ene-Feb, 1991.
- “Etapas del mantenimiento predictivo de averías. Medida, análisis y diagnóstico”; Mantenimiento; España; No. 36; Nov-Dic, 1989.

### CAPITULO II

- T. Thomson.Vibration Theory and Applications. London 1988.
- French. Vibraciones y Ondas .Editorial Reverté 1982.
- Reyes. Oscilaciones y Onads. Editorial Empes. ISPJAE.
- Piedra. Aplicaciones de las vibraciones al estudio de las instalaciones energéticas. Boletín Técnico CEN Juraguá.1990.
- T. Broch. Mechanical Vibration and Shock Measurements. B&K 1984.

- Piedra, C. Hidalgo, A. Martinez. Ensayos no destructivos de tuberías de pequeño diámetro. Revista Pesquisa da Marina. Brasil 1995.
- Santos, M.Piedra. Experiencias con el sistema para el procesamiento de señales vibroacústicas SIDIR. ISCTN 1990.
- Piedra. Dependencia de la respuesta del sistema de la magnitud de la fuerza impulsiva. ISCTN IPRJ 1994.
- L.Rodriguez, E. Artaza. Software para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. SOLVER. ISCTN 1994.
- T.Thomson. Mechanical Vibrations. 1953.
- M.Coll. Mechanical Vibration.This calculation, Measurements, effects and suppression. 1947.
- Kendall E. Atkinson. Numerical Solution of System of Linear Equations. An Introduction to Numerical Analysis. John Wiley & Sons. N. Y. 1978
- P. Williams, B. P. Flannery, A. T. Saul,T. V.Williams. Fourier Transform Spectral Methos. Procceding of Numerical Recipes in Pascal. Cambridge 1989.
- S. Bendat, A.G. Piersol. Measurement and Analysis of Random Data. N.Y.1971.
- P. Williams, B. P. Flannery, A. T. Saul,T. V.Williams. Statical Description of Data. Procceding of Numerical Recipes in Pascal. Cambridge 1989.
- T. Thomson. Vibration Random Data. Theory and Applications.London 1988.

### CAPITULO III

- Harris, Cyril M.; Crede, C. M.; “Shock and Vibration Handbook”, 1976.
- Panovko, Ya.; “Elements of applied theory of elastic vibration”, 1971.
- Barker, John Robert; “Mechanical and electrical vibrations”, 1964.
- Den Hartog, Jacob P.; “Mecánica de las vibraciones”, 1964.
- Lafita Babio, Felipe; “Introducción a la teoría de las vibraciones mecánicas”, 1968.
- Broch, Jens Tramp; “Mechanical vibration and shock measurements”, 1980.
- Horowitz, Paul; “The art of electronics”; 1980.
- Gray, B. F.; “Measurements, instrumentation and data transmission”, 1979.
- Cady, Walter G; y otros; “Piezoelectricity, an introduction to the theory and applications of electro-mechanical phenomena in crystals”, 1956.
- Lang, Sidney B.; “Sourcebook of pyroelectricity”, 1974.
- Barna, Arpad; “Operational Amplifiers”; 1971.
- Escoriza Martínez, Ariel; “Calibración del acelerómetro cubano RAC 10-3/1092”; Tesis de Diploma - 360; ISCTN, C. de la Habana; 1994.
- Argulló, J.; y otros; “Criterios de selección de sensores de vibración”; Automática e Instrumentación; España, Oct. 1986.
- Bolaños, Fernando; “Transductores para la medida de vibraciones en maquinaria”; Mantenimiento; España, Abril, 1991.
- “Aplicaciones de colectores de datos de mantenimiento. Criterios de valoración comparativa”; Mantenimiento; España; Jul-Ago., 1990.
- “Analizador para diagnosis y mantenimiento predictivo”; Mantenimiento; España, Feb. 1991.
- García Guerra, Antonio; y otros; “Circuitos electrónicos digitales II”; Edit. Rev.; 2da. reimpresión; 1990.
- “Transductor piezoeléctrico de aceleración”; (SU); Clasificación Internacional de Patentes, 4ta. Edición, 1984; G 01 P 15/08 526830; public. 1976.

- “Acelerómetro de tres componentes de baja frecuencia”; (SU); Clasificación Internacional de Patentes, 4ta. Edición, 1984; G 01 P 15/09 1107061; public. 1984.

#### CAPITULO IV

- R. Armas. Instrumentación Primaria para el Análisis vibracional. ISCT 1994.
- T, Broch. Vibrations Measurements for Machine Healt Monitoring. B&K. 1984
- Normas ISO 2372.
- M. Piedra , J. Santos. Software para el Procesamiento y Análisis de Señales Vibroacústicas. INTERSOFT'89. MINBAS.
- IRD. Mechanalisis Technical Paper No 57